现代数学译丛 8

微分方程的对称与积分方法

〔加〕G.W.布卢曼，S.C.安 科 著

闫振亚 译



(O-3260.0101)


ISBN 978-7-03-022453-8

9 787030 224538 >

销售分类建议：高等数学

定 价：68.00 元

现代数学译丛 8

微分方程的对称与积分方法

〔加〕G. W. 布卢曼，S. C. 安科 著

闫振亚 译

科学出版社

北京

图字：01-2007-3734 号

内 容 简 介

本书系统地介绍了量纲分析、Lie 无穷小变换以及在常微分方程(组)和偏微分方程(组)中的应用，全书共分四章. 第 1 章介绍了量纲分析、有关的重要原理及其在偏微分方程不变解中的应用. 第 2 章发展了 Lie 无穷小变换和 Lie 代数，给出了一些基本定理和性质，另外，详细给出了无穷小变换的高阶展开公式. 第 3 章主要讨论 Lie 对称在各种常微分方程(组)中的应用，包括一阶、二阶和更高阶的方程以及常微分方程的初值问题等. 另外，还讨论了接触对称、高阶对称和伴随对称. 第 4 章讨论 Lie 对称在各类偏微分方程(组)中的应用. 每节后附有大量经典的例子，供读者进一步熟练掌握 Lie 对称及其拓展类型的使用方法，详略得当，易于读者阅读.

本书可作为高等院校数学、物理、力学、生物学、工程等专业的高年级大学生和研究生教材或参考书. 也可供相关领域的教师和科研人员阅读参考.

Translation from the English Language edition:
Symmetry and Integration Methods for Differential Equations by George Bluman and Stephen Anco
Copyright © 2002 Springer-Verlag New York, Inc.
Springer is a part of Springer Science+Business Media
All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

微分方程的对称与积分方法/〔加〕G.W.布卢曼，S.C.安科著；闫振亚译.
—北京：科学出版社，2009
(现代数学译丛；8)
ISBN 978-7-03-022453-8
I. 微… II. ① 布… ② 闫… III. 微分方程 IV. O175
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 099657 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：鲁 素
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 1 月第一次印刷 印张：23 1/4
印数：1—2 500 字数：452 000
定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉)

中文版序

本中文译本遵循英文原版. 另一本关于偏微分方程的高级对称方法的书, 即本书英文版的第二卷, 即将完成并将于 2009 年由 Springer 出版社出版.

第二卷 (合作者为 Alexei Cheviakov 和 Stephen Anco) 是有关 PDEs 的对称和守恒律的现代发展. 内容包括接触对称和高阶对称; 守恒律的直接计算方法以及这些方法如何取代 Noether 定理并被推广以计算任意 PDEs(无论其是否为变分的) 的守恒律; 有关 PDEs 间映射的构造, 包括利用对称或守恒律的乘法来构造非线性 PDE 到线性 PDE 的映射, 以及变系数线性 PDE 到常系数线性 PDE 的映射; 如何利用给定 PDE 的守恒律构造非局部相关但等价的 PDE, 并在此框架下说明物理方程的 Lagrange 形式和 Euler 形式是如何相关的, 如何利用这样的非局部相关系统来构造给定 PDE 的非局部守恒律和对称; 如何利用这样的非局部相关系统来进一步构造不变解, 寻求非线性系统到线性系统的映射, 寻求能够变为常系数线性 PDE 的变系数线性 PDE 类; 寻求给定 PDE 的扩展的不变解族的非古典方法; 执行运算所需的符号算法.

非常感谢闫振亚承担本书的翻译工作, 希望本书的中文译本能使中国学生和研究者更容易接受和理解对称和微分方程.

G.W. 布卢曼

温哥华, 加拿大, 2008

前言

本书是对 Bluman 和 Kumei 的《对称与微分方程》(1989 年初版, 1996 年重印) 前四章的重要更新. 自从 1989 年以来, 在微分方程的对称方法 (群方法) 方面已经有了相当大的发展, 不少研究论文、著作和新的符号软件都致力于这个课题的研究. 毫无疑问, 这是由于这些方法在非线性微分方程中具有固有的适用性. 微分方程的对称方法最初是由 Lie 于 19 世纪后半叶发展起来的, 具有高度的算法化, 因此适用于符号计算. 这些方法系统地拓展了已知的构造微分方程的显式解的技巧, 特别是非线性微分方程. 求解特殊微分方程独创性的技巧明显源于对称的观点, 因而对称方法并没有被更广泛地接受显得有点令人惊讶. 学习本书中所提出的方法, 进而理解已知的符号操作软件来获得微分方程的解析结果是非常有意义的. 常微分方程 (ODEs) 包括通过群不变性或积分因子实现阶的约化, 偏微分方程 (PDEs) 包含特殊解的构造, 如相似解或非古典解、寻找守恒律、等价映射以及线性化.

本书的大部分内容并没有出现在《对称与微分方程》中, 特别是关于高阶 ODEs 的首次积分, 以及用高阶对称约化 ODE 的阶. 另外, 本书还增加了 ODE 的对称和积分方法之间比较的新内容.

本书包括对量纲分析的综合处理. 对 Lie 点变换 (点对称) 群、接触对称和高阶对称进行了全面讨论, 这对于发现微分方程的解是重要的, 而不需要群理论的知识. 本书重点是利用显式的算法研究给定微分方程的对称和积分因子, 进而由这样的对称和积分因子构造解和首次积分.

本书特别适合于应用数学工作者、工程人员及科学家阅读, 因为他们对如何系统地发现微分方程的显式解很感兴趣. 书中几乎所有的例子都来自物理和工程中的实际应用, 包括与热方程、波传播和流体流动有关的问题.

第 1 章详细讨论了量纲分析. 通过具体介绍不变性概念, 引入了著名的 Buckingham Pi 定理. 变量尺度变换作用下边值问题的不变性自然导致一般化, 这就埋下了伏笔, 因为第 3 章和第 4 章讨论 Lie 变换群作用下微分方程的更广义的不变性. 基本上, 在阅读第 1 章后, 读者会对本书的一些主题有个直观的印象.

第 2 章发展了 Lie 变换群和 Lie 代数的基本概念, 这对下面两章的阅读是必要的. 从函数映成函数且其自变量不变的观点, 通过无穷小生成元来考虑 Lie 点变换群, 我们证明如何自然地考虑其他的局部变换, 如接触变换和高阶变换. 而且, 这为研究微分方程的积分因子打下了基础.

第 3 章研究 ODEs. 我们提出了一个约化算法, 若 n 阶 ODE 拥有一个可解的

r 参数 Lie 点变换 (点对称) 群, 则该算法将这个 ODE 约化为 $n-r$ 阶微分方程和 r 个求积分. 我们将说明如何发现所拥有的点、接触以及高阶对称, 也将说明如何推广约化算法来合并那样的对称. 我们证明了如何通过相应的积分因子发现首次积分, 进而用首次积分实现阶的约化. 我们说明如何简化以及将发现守恒律 (首次积分) 的古典 Noether 定理有意义地推广到任意 ODE (并不拥有一个变分原理). 特别地, 我们说明了如何用各种算法程序计算积分因子, 这些程序类似于计算具有特征形式的对称, 这里, 因变量仅仅发生一个变换. 通过所拥有的局部对称和积分因子, 我们也对不同的约化阶方法进行了比较, 说明了如何用点对称作用下的不变性来解边值问题, 推导出了一个算法来构造源于对称的特解 (不变解). 通过研究它们的拓扑本性, 说明不变解包括分界线和奇异包络解.

第 4 章研究 PDEs. 我们证明了如何发现所拥有的对称和构造有关的不变解. 用许多包括标量 PDEs 和偏微分方程组的例子, 讨论了边值问题的适应性.

第 2～4 章可独立于第 1 章阅读. 而且, 对 PDEs 有兴趣的读者可以跳过第 3 章.

本书通过例子研究每一个主题. 所有章节都配有很多习题, 这对于获得理论的应用知识是重要的. 每一章最后的讨论部分, 通过总结主要的结果和参看有关的文献以及引入相关的资料, 使得每章内容更加深入.

在每章的每一部分和子部分, 我们分别连续地对定义、定理、引理以及推论进行排序. 例如, 定义 2.3.3.1 和定理 2.3.3.1 分别是指 2.3.3 节中的第一个定义和第一个定理. 每一节的最后是习题, 习题 2.4.2 是指习题 2.4 中的第二个问题.

Benny Bluman 为本书制作了插图, Cecile Gauthier 打印了 3.5～3.8 节中的若干草稿, 我们对此表示感谢.

G.W. 布卢曼

温哥华, 不列颠哥伦比亚省, 加拿大

S. C. 安科

圣凯瑟琳, 安大略省, 加拿大

目　录

绪　论

为了统一和推广求解常微分方程 (ODEs) 的各种特殊方法, Lie 于 19 世纪后期引入连续群的概念, 现在称为 Lie 群. Lie 是受 Sylow 在 Christiania(挪威首都的旧称, 现在叫奥斯陆) 所作的关于 Galois 群和 Abel 有关工作的讲座的启发 (1881 年, Sylow 和 Lie 合作编辑 Abel 的全部工作). Lie 证明, 若单参数 Lie 点变换群作用下 ODE 是不变的, 则该 ODE 可以降低一阶.

Lie 的工作是关于 ODEs 的杂文集, 包括积分因子、可分离方程、齐次方程、阶的约化、线性方程的参数变换和系数的确定方法、Euler 方程的解以及 Laplace 变换的应用. Lie(1881) 也指出, 对于线性偏微分方程 (PDEs), 根据变换, Lie 群作用下的不变性直接导致解的叠加.

微分方程组的对称就是一个变换, 它将方程组的任意解映成该方程组的另一个解. 在 Lie 的框架结构下, 这样的变换是依赖连续参数的群, 且由作用在系统的自变量和因变量空间上的点变换 (点对称), 或更一般地, 由作用在自变量和因变量以及因变量的所有一阶导数的空间上的接触变换 (接触对称) 组成. Lie 群的初等例子包括平移、旋转和尺度变换. 一阶自治的常微分方程组, 即定常流, 实质上定义了一个单参数 Lie 点变换群. Lie 证明, 对于给定的 (线性或非线性) 微分方程, 作用在自变量和因变量空间上的点变换连续群可以通过显式的算法 (Lie 算法) 确定.

本书将连续群应用于微分方程并没有利用 Lie 群的全局性质. 这些应用与局部 Lie 变换群有关. Lie 基本定理表明, 这样的群完全可以用它们的无穷小生成元刻画. 依次, 这些构成了由结构常数确定的 Lie 代数.

Lie 群 (或它们的无穷小生成元) 可以自然地推广或延拓到作用在自变量和因变量以及因变量的直到任意有限阶的导数空间上. 结果, 看起来难处理的给定微分方程组的群不变性的非线性条件, 可以约化为确定该群的无穷小生成元的线性齐次方程. 因为这些确定方程组成一个超定的线性齐次偏微分方程组, 所以通常可以显式地确定无穷小生成元. 对于给定的微分方程组, 建立确定方程完全是程序化的. 用符号操作程序建立确定方程, 在某些情况下可以显式地求解它们 (Schwarz, 1985, 1988; Kersten, 1987; Head, 1992; Champagne, Hereman and Winternitz, 1991; Wolf and Brand, 1992; Hereman, 1996; Reid, 1990, 1991; Mansfield, 1996; Mansfield and Clarkson, 1997; Wolf, 2002a).

可以推广 Lie 的工作以发现和使用微分方程拥有的高阶对称. Noether(1918) 首先考虑了高阶对称存在的可能性问题, 这样的对称是由仅仅作用在因变量上的无

穷小生成元来刻画的, 且生成元的系数依赖自变量、因变量以及它们的直到某有限阶的导数. 特别地, 整体上, 这样的变换作用在自变量、因变量以及它们所有阶导数的无穷维空间上. 但是, 由 Lie 算法的自然推广可以发现给定微分方程的这样的变换.

对于一阶 ODE, Lie 证明了一个点对称作用下 ODE 的不变性等价于它的首次积分的存在性. 这种情况下, 首次积分产生守恒量, 且是 ODE 的每个解的常数. n 阶 ODE 的局部存在性表明, 总存在 n 个函数无关的首次积分, 是关于自变量、因变量以及它的直到 $n-1$ 阶导数的求积分. 相应地, n 阶 ODE 拥有 n 个基本的守恒量. 而且, 任一首次积分源于一个积分因子, 它是由自变量、因变量以及它的直到某阶的导数确定的, 且乘以 ODE 可以将它变换为精确 (全导数) 形式.

对于高阶 ODE, 仅仅当它具有变分原理 (Lagrange 算子) 时, 首次积分和点对称作用下不变性之间的对应才成立. 特别地, Noether 工作表明, 如果对称保持 ODE 的变分原理 (变分对称) 不变, 则点对称、接触对称或高阶对称作用下, 这样 ODE 的不变性等价于它的首次积分的存在性. 这里用特征形式的对称是重要的, 且无穷小生成元的系数仅仅作用在因变量 (和它的导数) 上. 对称确定方程由 ODE 的线性化 (Frechét 导数) 给定, 且对 ODE 的所有解都成立. 通过额外的确定方程, 对称是变分对称的条件可以用 ODE 的线性化表示. 积分因子是所导致的确定方程组的解.

对于不具有变分原理的 ODE, 我们证明, 积分因子与伴随对称 (定义为 ODE 的线性化 (Frechét 导数) 的伴随方程的解) 有关系. 特别地, 若伴随对称是积分因子, 则存在一个充要的额外确定方程. 这就将具有变分原理的 ODE 情况下首次积分和变分对称之间的等价性推广到了不具有变分原理的 ODE 情况下首次积分与满足额外伴随不变性条件的伴随对称之间的等价性.

伴随对称在研究 ODEs 的首次积分中具有中心的角色. 最重要的, 解对称确定方程的算法的扩展可以用于求解伴随对称确定方程以及积分因子的确定方程组.

通过发现首次积分, 积分因子给出了另一个方法来构造性地约化 ODE 的阶. 对于二阶和高阶 ODEs, 这种阶的约化方法是对 Lie 约化方法的补充, 但不依赖于它. 特别地, 与 Lie 算法比较, 积分因子方法仅仅作为算法而没有更多计算复杂性. 而且, 利用积分因子方法, 根据最初 ODE 给定的变量, 可以实现阶的约化, 不像通过点对称的约化, 因为所约化的 ODE 包含推导的自变量和因变量 (如果用最初的变量表示, 通常保留给定 ODE 的同样的阶).

如果偏微分方程组在 Lie 点变换群作用下是不变的, 则可以构造性地发现特解, 称为相似解或不变解, 这个解在该方程组拥有的整个群的子群作用下是不变的. 这些解是通过求解具有更少的自变量的约化的微分方程组得到的. Lie 群的应用是 Lie 发现的, 但是, 首次应用却是 20 世纪 50 年代末 Ovsiannikov(1962,1982) 在新

西伯利亚 (前苏联西西伯利亚东南部城市) 所领导的 Soviet 团体的研究工作. 不变解也可以构造特殊的边值问题. 这里寻找给定 PDE 的完全群的子群保持边界曲线和作用在它们上的条件不变 (Bluman, Cole, 1974). 这样的解包括自相似 (自模拟) 解, 可以通过量纲分析, 或者更一般地, 尺度变换作用下不变性得到. 不变解和变量分离之间的联系已经被 Miller(1977) 及合作者广泛地研究. 对于 ODEs, 不变解具有特别好的几何性质, 包括分界线和包络解 (Bluman, 1990c; Dresner, 1999).

第 1 章　量纲分析、建模与不变性

1.1　引　　言

本章基于对量纲分析的全面研究, 介绍不变性蕴涵的一些思想. 我们将说明量纲分析与建模及 PDEs 边值问题的不变性所导致的解的构造之间是如何建立联系的.

对于感兴趣的一个量, 通常人们最多知道它所依赖的自变量 (不妨说共有 n 个) 和所有这 $n+1$ 个量的量纲. 量纲分析通常用于约化基本自变量的个数. 建模的出发点是力求减少必要的试验测量的个数. 下面将要证明, 量纲分析能够约化 PDE 边值问题中自变量的个数. 最重要的是, 对于 PDEs, 基于量纲分析的自变量个数的约化是尺度 (拉伸) 变换群作用下不变性约化的一种特殊情况.

1.2　量纲分析: Buckingham Pi 定理

量纲分析的基本定理为美国工程科学家 Buckingham(1914, 1915a, b) 提出的所谓 Buckingham Pi 定理. 参看文献 (Bridgman, 1931; Barenblatt, 1979, 1987, 1996; Sedov, 1982; Bluman, 1983a). Görtler (1975) 给出了它的历史发展. 详细的数学描述参看文献 (Curtis, Logan and Parker, 1982).

下面关于量纲分析的假设和结论构成了 Buckingham Pi 定理.

1.2.1　量纲分析蕴涵的假设

基本上, 现实中不存在与下面的假设相矛盾的问题:

(1) u 是由 n 个可测的量 (变量和参数)$W_1, W_2, \cdots, W_n$ 确定的:

$$u = f(W_1, W_2, \cdots, W_n), \tag{1.1}$$

其中 f 为 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的函数.

(2) 量 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 是由 m 个基本量纲 (标记为 $L_1, L_2, \cdots, L_m$) 测量得到的. 例如, 通常力学问题中基本量纲为 $L_1=$ 长度, $L_2=$ 质量, $L_3=$ 时间.

(3) 令 Z 代表 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 中任一量, 那么, Z 的量纲 (记为 $[Z]$) 是基本量纲幂的乘积, 特别地,

$$[Z] = L_1^{\alpha_1} L_2^{\alpha_2} \cdots L_m^{\alpha_m}, \tag{1.2}$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 为实数, 通常是有理数, 称为 Z 的量纲指数. Z 的量纲向量为列向量

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Z 是无量纲的当且仅当 $[Z]=1$, 即当且仅当所有量纲指数都为零. 例如, 根据力学的基本量纲, 能量 E 的量纲向量为

$$\alpha(E) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

令

$$b_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

为 $W_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 的量纲向量, 并且令

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

为给定问题的 $m \times n$ 维矩阵.

(4) 对于任意基本量纲集合, 可以选择一单元系统用于测量任一量 Z 的值. 从一个到另一个单元系统的变化包含每个基本量的一次正尺度变换, 从而导致每个量Z的一次尺度变换. 例如, 对于力学的基本量纲, 通常的单元系统为mks(米·公里·秒)、cgs (厘米·克·秒) 或英国的英尺·磅. 当 cgs 变为 mks 时, L_1 以 10^{-2} 缩小, L_2 以 10^{-3} 缩小, L_3 保持不变, 因此能量 E 的值以 10^{-7} 缩小. 在单元系统变换作用下, 无量纲的量值不变, 即它的值在任意基本量纲的任意尺度变换作用下都是不变的. 因此, 判断无量纲量的大小是有意义的. 量纲分析的最后一个假设是公式 (1.1), 被看作无量纲方程, 在这个意义下, (1.1) 在任意基本量纲的任意尺度变换作用下是不变的, 即 (1.1) 与单元系统的选择无关.

1.2.2 量纲分析的结论

1.2.1 节中 Buckingham Pi 定理的假设导致如下结论:

(1) 公式 (1.1) 可以由无量纲的量来表示.

(2) 无量纲的量的数目为 $k+1=n+1-r(B)$, 其中 $r(B)$ 为矩阵 B 的秩. 准确地说, 这些无量纲的量的个数 k 依赖可测量 $W_1, W_2, \cdots, W_n$.

(3) 令

$$x^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\cdots,k \tag{1.6}$$

表示系统

$$Bx=0 \tag{1.7}$$

的 $k=n-r(B)$ 个线性无关的解 x.

令

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

为 u 的量纲向量, 且令

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

表示系统

$$By=-a \tag{1.10}$$

的一个解. 那么, 式 (1.1) 简化为

$$\pi = g(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k), \tag{1.11}$$

其中 π, π_i 为如下给出的无量纲的量

$$\pi = uW_1^{y_1}W_2^{y_2}\cdots W_n^{y_n}, \tag{1.12a}$$

$$\pi_i = W_1^{x_{1i}} W_2^{x_{2i}} \cdots W_n^{x_{ni}}, \quad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{1.12b}$$

g 为相应变量的函数. 特别地, (1.1) 变为

$$u = W_1^{-y_1} W_2^{-y_2} \cdots W_n^{-y_n} g(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k). \tag{1.13}$$

根据试验建模, 式 (1.13) 比 (1.1)"便宜" $r(B)$ 阶个数量级.

1.2.3 Buckingham Pi 定理的证明

首先

$$[u] = L_1^{a_1} L_2^{a_2} \cdots L_m^{a_m}, \tag{1.14a}$$

$$[W_i] = L_1^{b_{1i}} L_2^{b_{2i}} \cdots L_m^{b_{mi}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.14b}$$

接着, 利用假设 (4), 依次取每个基本量, 并且考虑在基本量的任意缩放比例作用下 (1.1) 的不变性. 首先缩放 L_1, 即

$$L_1^* = \mathrm{e}^{\varepsilon} L_1, \quad \varepsilon \in R. \tag{1.15}$$

进而导致下面的可测量缩放比例

$$u^* = \mathrm{e}^{\varepsilon a_1} u, \tag{1.16a}$$

$$W_i^* = \mathrm{e}^{\varepsilon b_{1i}} W_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.16b}$$

方程 (1.16a,b) 恰好定义了 $n+1$ 个量 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 的一个单参数 (ε) Lie 尺度变换群, $\varepsilon = 0$ 对应恒等变换. 该群是由基本量 L_1 的单参数拉伸群 (1.15) 所诱导的.

本章下面部分并不需要熟悉 Lie 群知识.

根据假设 (4), 式 (1.1) 成立当且仅当

$$u^* = f(W_1^*, W_2^*, \cdots, W_n^*),$$

即对所有 $\varepsilon \in \mathbf{R}$, 有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon a_1} u = f(\mathrm{e}^{\varepsilon b_{11}} W_1, \mathrm{e}^{\varepsilon b_{12}} W_2, \cdots, \mathrm{e}^{\varepsilon b_{1n}} W_n). \tag{1.17}$$

分两种情况讨论:

情况 1. $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{1n} = a_1 = 0$. 这里, L_1 不是问题的基本量, 换句话说, 式 (1.1) 关于 L_1 是无量纲的.

情况 2. $b_{11} = b_{12} = \cdots = b_{1n} = 0$, $a_1 \neq 0$. 这种情况下, $u \equiv 0$ 为平凡态.

因此, 对于某些 $i=1,2,\cdots,n$, 可得 $b_{1i}\neq 0$. 不失一般性, 假设 $b_{11}\neq 0$. 定义新的可测量

$$X_{i-1}=W_iW_1^{-b_{1i}/b_{11}},\quad i=2,3,\cdots,n, \tag{1.18}$$

且令

$$X_n=W_1. \tag{1.19}$$

选择新的未知量

$$v=uW_1^{-a_1/b_{11}}. \tag{1.20}$$

变换 (1.18)~(1.20) 定义了一个由 $W_1, W_2,\cdots,W_n$ 到 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一对一映射和由 $u,W_1,W_2,\cdots,W_n$ 到 $v,X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一对一映射. 这样, 公式 (1.1) 等价于

$$v=F(X_1,X_2,\cdots,X_n), \tag{1.21}$$

其中 F 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的函数. 于是, 变换 (1.16a,b) 变为

$$v^*=v, \tag{1.22a}$$

$$X_i^*=X_i,\quad i=1,2,\cdots,n-1, \tag{1.22b}$$

$$X_n^*=\mathrm{e}^{\varepsilon b_{11}}X_n, \tag{1.22c}$$

使得 $v,X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ 为 (1.16a,b) 的不变量. 而且, $v,X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ 满足假设 (3), (1.21) 满足假设 (4). 因此, 对所有 $\varepsilon\in\mathbf{R}$, 有

$$v=F(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1},\mathrm{e}^{\varepsilon b_{11}}X_n), \tag{1.23}$$

于是, F 与 X_n 无关. 另外, 可测量 $X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ 为 $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 的幂的乘积, v 为 $W_1,W_2,\cdots,W_n$ 的幂与 u 的乘积. 这样, 式 (1.1) 约化为

$$v=G(X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}), \tag{1.24}$$

其中 $v,X_1,X_2,\cdots,X_{n-1}$ 关于 L_1 是无量纲的, G 是其 $n-1$ 个变量的函数.

依次继续考虑其他 $m-1$ 个基本量, (1.1) 可约化为无量纲形式

$$\pi=g(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k), \tag{1.25}$$

其中 $[\pi]=[\pi_i]=1$, g 为 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_k$ 的函数:

$$\pi=uW_1^{y_1}W_2^{y_2}\cdots W_n^{y_n}, \tag{1.26a}$$

$$\pi_i=W_1^{x_{1i}}W_2^{x_{2i}}\cdots W_n^{x_{ni}},\quad i=1,2,\cdots,k, \tag{1.26b}$$

这里 y_j,x_{ji}, 为实数, $i=1,2,\cdots,k; j=1,2,\cdots,n$.

下面证明, 可测无量纲的量的个数为 $k=n-r(B)$. 因为

$$[W_1^{x_1}W_1^{x_2}\cdots W_n^{x_n}]=1$$

当且仅当

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

满足 (1.7). (1.7) 拥有 $k=n-r(B)$ 个由 (1.6) 给出的线性无关的解 $x^{(i)}$. 由

$$[uW_1^{y_1}W_1^{y_2}\cdots W_n^{y_n}]=1$$

可知实数

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

满足 (1.10).

注 在 Buckingham Pi 定理的证明中, 并没有假设函数 f 的连续性, 因此也不要求所导出的 g 的连续性.

1.2.4 举例

1. 1945 年原子弹爆炸

1945 年在美国新墨西哥州爆炸了第一颗原子弹, 根据 1947 年解密的 Mack 所拍摄的运动图片记录, Sir Geoffrey Taylor (1950) 推导出了原子弹爆炸所释放的近似能量. 但是冲击波所释放的巨大能量在 1947 年还是保密的 (推导所用的方法是 Taylor 于 1941 年给出的). Taylor 推导的量纲分析讨论如下:

原子弹爆炸可近似认为巨大的能量 E 从一个 "点" 释放, 其结果是一个边缘对应于强大冲击波的扩张的火球. 令 $u=R$ 为冲击波的半径, 将 R 作为未知量, 且假设

$$R=f(W_1,\ W_2,\ W_3,\ W_4), \tag{1.27}$$

这里

$W_1=E$ 为爆炸释放的能量;

$W_2 = t$ 为爆炸发生后消逝的时间;

$W_3 = \rho_0$ 为最初或周围的空气密度;

$W_4 = P_0$ 为最初或周围的空气压强.

我们应用力学基本量纲分析这一问题. 相应的量纲矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

显然, $r(B)=3$, 因此 $k = n - r(B)=4-3=1$. $Bx=0$ 的通解为 $x_1=-\dfrac{2}{5}x_4$, $x_2=\dfrac{6}{5}x_4$, $x_3=-\dfrac{3}{5}x_4$, 其中 x_4 是任意的, 令 $x_4=1$, 那么可测的无量纲的量为

$$\pi_1 = P_0\left[\frac{t^6}{E^2(\rho_0)^3}\right]^{1/5}. \tag{1.29}$$

R 的量纲向量为

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1.30}$$

方程 $By=-a$ 的通解为

$$y = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x, \tag{1.31}$$

其中 x 为 $Bx=0$ 的通解. 令 (1.31) 中的 $x=0$, 可得无量纲的未知数

$$\pi = R\left[\frac{Et^2}{\rho_0}\right]^{-1/5}. \tag{1.32}$$

因此, 由量纲分析知

$$R = \left[\frac{Et^2}{\rho_0}\right]^{1/5} g(\pi_1), \tag{1.33}$$

其中 g 为 π_1 的函数.

等价地, 对于函数 $h_q(\pi_1) = g(\pi_1)\pi_1^{-q}$, 有

$$R = \left[\frac{Et^2}{\rho_0}\right]^{1/5}(P_0)^q\left[\frac{t^6}{E^2(\rho_0)^3}\right]^{q/5} h_q(\pi_1).$$

现在假设对某 $q=Q, h_Q(0)\neq 0$, $h_Q(\pi_1)$ 在点 $\pi_1=0$ 是连续的, 即实质上假设对某个 $q=Q$, 在 $t=0$ 附近, 有 $R\propto t^{(2+6q)/5}$. 那么在 $\pi_1=0$ 附近, 对某常数

$$C=\frac{1-2Q}{5}\log E-\frac{1+3Q}{5}\log\rho_0+Q\log P_0+\log h_Q(0),$$

有

$$R=E^{(1-2Q)/5}(\rho_0)^{-(1+3Q)/5}(P_0)^Q t^{(2+6Q)/5}h_Q(\pi_1)$$

和

$$\log R=\frac{2+6Q}{5}\log t+C.$$

用图刻画一个光爆试验中 $\log R$ 和 $\log t$ 的对照, 可以确定 $Q\cong 0$ 和 $g(0)=h_0(0)\cong 1$. 这样就得到 Taylor 的近似公式

$$R=At^{2/5}, \tag{1.34}$$

其中

$$A=\left(\frac{E}{\rho_0}\right)^{1/5}g(0). \tag{1.35}$$

利用 Mack 的第一颗原子弹爆炸的运动图, Taylor 给出了 $\frac{5}{2}\log_{10}R$ 和 $\log_{10}t$ 的对照图, 其中 R,t 是由 cgs 单位来测定的 (参看图 1.1, + 表示运动图像数据). 这导致爆炸中机密能量 E 的精确估计.

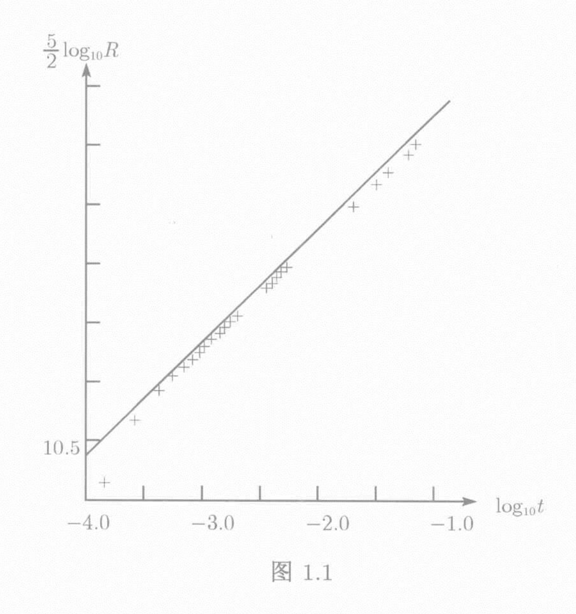


图 1.1

2. 热传导

本例用以说明基本量的选择. 在一个具有恒热性质 "无限长" 的杆中, 考虑一维热传导的标准问题. 最初从一个点的热源加热. 令 u 为杆上任一点的温度. 假设

$$u = f(W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6), \tag{1.36}$$

其中

$W_1 = x$ 为从热源点沿着杆的距离;

$W_2 = t$ 为最初加热后消逝的时间;

$W_3 = \rho$ 为杆的质量密度;

$W_4 = c$ 为杆的比热;

$W_5 = K$ 为杆的导热性;

$W_6 = Q$ 为热源的强度, 用能量单位/(长度单位)^2 来度量.

分两类不同的基本量纲选择, 考虑量纲分析在简化 (1.36) 中的作用.

选择 1 (动力单位制). 令 L_1= 长度,L_2= 质量, L_3= 时间, L_4= 温度. 相应地, 量纲矩阵为

$$B_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.37}$$

可知 $r(B_I) = 4$. 因此可测无量纲量的个数为 $k= 6 - 4 = 2$. 可以选择 $B_I x=0$ 的两个线性无关的解 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$, 使得 π_1 与 t 无关且是 x 的线性函数, 而 π_2 与 x 无关且是 t 的线性函数. 因此

$$\pi_1 = \xi = \frac{\rho c^2 Q}{K^2} x, \tag{1.38a}$$

$$\pi_2 = \tau = \frac{\rho c^3 Q^2}{K^3} t. \tag{1.38b}$$

对于无量纲的量 π, 选择方程

$$B_I y = -a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

的一个解, 其中 $y_1 = y_2 = 0$, 使得 π 与 x 和 t 无关. 相应地

$$\pi = \frac{K^2}{Q^2 c} u. \tag{1.39}$$

因此, 动力单位制的量纲分析使得 (1.36) 约化为

$$u = \frac{Q^2 c}{K^2} F(\xi, \tau), \tag{1.40}$$

其中 F 为 ξ 和 τ 的函数.

选择 2 (热量单位制). 所研究的问题中并没有热能和机械能之间的转化, 受这种隐式的假设启发, 通过引入热能单位 $L_5 =$ 卡路里来精炼动力单位. 相应的量纲矩阵为

$$B_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.41}$$

可知 $r(B_{II}) = 5$. 因此仅仅有一个可测的无量纲的量. 对于无量纲的量, 选择方程

$$\pi_1 = \eta = \frac{x}{\sqrt{\kappa t}}, \quad \kappa = \frac{K}{\rho c}, \tag{1.42a}$$

$$\pi_1 = \frac{\sqrt{\rho c K t}}{Q} u. \tag{1.42b}$$

因此, 热量单位制的量纲分析使得 (1.36) 约化为

$$u = \frac{Q}{\sqrt{\rho c K t}} G(\eta), \tag{1.43}$$

其中 G 为 η 的函数.

注 若取

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{\tau}}, \quad F(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} G\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right).$$

则 (1.43) 为 (1.40) 的特殊情况 (在热量单位制下, 每个量 ξ, τ, $K^2 u / Q^2 c$ 都不是无量纲的).

显然, 如果这是正确的, 那么表达式 (1.43) 是 (1.40) 的一个显著的简化. 通过操作试验或附加恰当的边值问题来确定 u, 可以证明热能单位制是合理的. 因此, 热能单位制能用于其他热 (扩散) 问题, 而问题的方程并不是完全已知的.

习 题 1.2

1. 利用量纲分析证明 Pythagoras 定理. 提示: 做直角三角形斜边上的垂线, 考虑所得到的三个相似三角形的面积.

2. 如何利用量纲分析和试验建模求从高度为 h 的地方垂直下落的物体的飞行时间?

(a) 模型 I: 假设 T 依赖 h、物体的质量 m、重力加速度 g 以及物体的形状 s.

(b) 模型 II: 考虑阻力. 当物体下落时, 阻力与速度 v 成比例, 设 k 为比例常数. 额外的无量纲量如何依赖于 h 和 m? 当 h 和 m 的值改变时, 常数 k 有何重要性?

3. 在 cgs 单位中, 给定 $\rho_0 = 1.3 \times 10^{-3}$ 和 $P_0 = 1.0 \times 10^{-6}$, 用图 1.1 中的数据估计 π_1 和 E 的范围.

4. 烹调一只火鸡. 假设火鸡是由统一的材料构成的, 且具有温度 c、质量密度 ρ、热传导率 K 以及重量 m. 假设烹调温度为 T, 令 t 是烹调火鸡的时间.

(a) 选择基本量纲: 长度、质量、时间和温度. 用量纲分析, 根据 c, ρ, K,m, T 以及火鸡的形状求 t.

(b) 重复 (a), 当温度作为第 5 个基本量纲时, 确定 t . 如何判定引入第 5 个基本量纲的合理性? 这个额外的基本量纲有用吗?

(c) 根据火鸡的表面积, 解释 (b) 中关于 t 的答案.

(d) 可以发现, t 与 $m^{2/3}$ 成比例.

(e) 假设对于某常数 p , t 与 m^p 成比例, 用食谱数据确定 p, $p = 2/3$ 的粗略的 "量纲分析" 估计有多好?

(f) 填塞料是如何影响这个结果的?

1.3　量纲分析在 PDEs 中的应用

设 $u, W_1, W_2, \cdots, W_n$ 是 PDEs 边值问题中出现的量, 该边值问题具有唯一解. 未知量 u (PDEs 的因变量) 为边值问题的解, W_1,$W_2, \cdots, W_n$ 表示边值问题中所有自变量和常数. 考虑量纲分析的应用. 根据 Buckingham Pi 定理, 这个边值问题可以用无量纲的形式重新表示, 其中 π 为无量纲因变量, $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_k$ 为无量纲自变量和常数.

假定 W_1,$W_2, \cdots, W_n$ 和 $W_{\ell+1}$,$W_{\ell+2}, \cdots, W_n$ 分别为边值问题中的 ℓ 个自变量和 $n-\ell$ 个常数. 令

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1\ell} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{m\ell} \end{bmatrix} \tag{1.44a}$$

为自变量的量纲矩阵,

$$B_2 = \begin{bmatrix} b_{1,\ell+1} & b_{1,\ell+2} & \cdots & b_{1n} \\ b_{2,\ell+1} & b_{2,\ell+2} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m,\ell+1} & b_{m,\ell+2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.44b}$$

为常数的量纲矩阵. 边值问题的量纲矩阵为

$$B = [B_1 \ |B_2] . \tag{1.45}$$

无量纲的量 π_i 称为一个无量纲常数, 当且仅当它与变量 $W_1,W_2,\cdots,W_\ell$ 无关, 即在 (1.26) 中有 $x_{ji}=0,\ j=1,2,\cdots,\ell$. 如果对于某个下标 $j=1,2,\cdots,\ell$ 满足 $x_{ji}\neq 0$, 那么无量纲的量 π_i 称为无量纲的变量. 边值问题中应用量纲分析的一个重要目的就是约减自变量的个数. B_2 的秩 $r(B_2)$ 代表量纲分析中约减的常数的个数. 因此约减的自变量的个数为 $\rho=r(B)-r(B_2)$. 特别地, 无量纲的可测量的个数为 $k=n-r(B)=[\ell-\rho]+[(n-\ell)-r(B_2)]$, 这里 $\ell-\rho$ 和 $n-\ell-r(B_2)$ 分别为无量纲的自变量和常数的个数.

若 $r(B)=r(B_2)$, 那么量纲分析将给定的边值问题约化为具有 $(n-\ell)-r(B_2)$ 个无量纲常数的无量纲的边值问题. 这种情况中, 自变量的个数并没有得到约化. 但是, 如果任意无量纲的常数是小的, 那么这对于摄动分析的出发点是有用的.

如果 $\ell\geqslant 2$, $\ell-\rho=1$, 那么所得到的边值问题的解称为自相似解或自模拟解.

1. 热传导的源问题

考虑 1.2.4 节中热传导问题的未知温度 u, 这里 $u(x,t)$ 为边值问题

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}-K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \quad -\infty<x<\infty,\ \ t>0, \tag{1.46a}$$

$$u(x,0)=\frac{Q}{\rho c}\delta(x), \tag{1.46b}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}u(x,t)=0 \tag{1.46c}$$

的解. (1.46b) 中, $\delta(x)$ 为 Dirac δ 函数.

利用动力单位制的量纲分析, 将 (1.46a~c) 约化为

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}=0, \quad -\infty<\xi<\infty,\ \ t>0, \tag{1.47a}$$

$$F(\xi,0)=\delta(\xi), \tag{1.47b}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} F(\xi,\tau) = 0, \tag{1.47c}$$

其中, u 由 (1.40) 中的 $F(\xi,\tau)$ 定义, ξ,τ 满足 (1.38a,b). 结果, 这对于求解边值问题 (1.46a~c) 并没有任何实质性的帮助.

现在, 利用热量单位制的量纲分析求解 (1.46a~c). 首先, 由 (1.47c) 可得

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

那么, 由该方程和 (1.47b) 得到守恒律

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi = 1$$

对所有 $\tau > 0$ 成立. 结果, 利用热量单位制的量纲分析得到的表达式 $F(\xi,\tau) = (1/\sqrt{\tau})G(\xi/\sqrt{\tau})$ 约化了 (1.47a~c), 进而将 (1.46a~c) 约化为具有自变量 $\eta=\xi/\sqrt{\tau}$ 和因变量 $G(\eta)$ 的 ODE 的边值问题, 其中

$$2\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}\eta^2} + \eta\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\eta} + G = 0, \quad -\infty<\eta<\infty, \tag{1.48a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\eta)\,\mathrm{d}\eta = 1, \tag{1.48b}$$

$$G(\pm\infty) = 0. \tag{1.48c}$$

1.4 节中将更自然地得到从 (1.46a~c) 到 ODE 边值问题的约化, 这种约化是利用变量在单参数拉伸群作用下的不变性得到的.

2. Prandtl-Blasius 平板问题

考虑流体通过半无界平板的 Prandtl 边值层方程

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1.49a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0<x<\infty, 0<y<\infty, \tag{1.49b}$$

且边值条件为

$$u(x,0) = 0, \tag{1.49c}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{1.49d}$$

$$u(x,\infty) = U, \tag{1.49e}$$

$$u(0,y) = U. \tag{1.49f}$$

在边值问题 (1.49a~f) 中, x 代表沿平面到其边沿 (切线坐标) 的距离, y 代表到平面表面 (通常坐标) 的距离, u 为 x 方向上的速度, v 为 y 方向上的速度, κ 为运动黏滞度, U 为入射流的速度 (如图 1.2 所示).

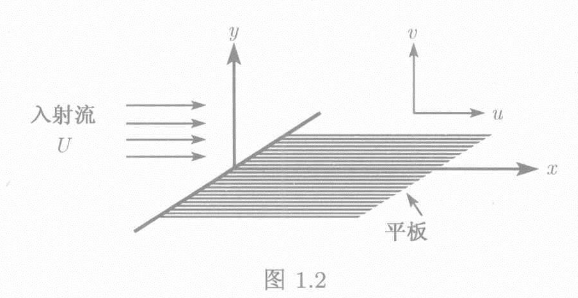


图 1.2

我们的目的是计算平面的剪切力 (表面摩擦) $u_y(x,\ 0)$, 这导致平面上黏滞曳力的确定. 从三个角度分析如何确定边值问题 (1.49a~f) 所定义的 $u_y(x,\ 0)$:

(1) 量纲分析. 根据 (1.49a~f) 可知

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0) = f(x,\ U,\ \kappa), \tag{1.50}$$

其中未知函数 f 由可测量 x, U, κ 确定. 基本量纲为 $L=$ 长度, $T=$ 时间. 则关于这些基本量纲有

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0)\right] = T^{-1}, \tag{1.51a}$$

$$[x] = L, \tag{1.51b}$$

$$[U] = LT^{-1}, \tag{1.51c}$$

$$[\kappa] = L^2T^{-1}. \tag{1.51d}$$

因此, $r(B)$=2. 无量纲量为

$$\pi_1 = \frac{Ux}{\kappa}, \tag{1.52a}$$

$$\pi = \frac{\kappa}{U^2}\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0). \tag{1.52b}$$

因此, 由量纲分析得

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0) = \frac{U^2}{\kappa}g\left(\frac{Ux}{\kappa}\right), \tag{1.53}$$

其中 g 是 Ux/κ 的未知函数.

(2) 量纲分析量的尺度变换. 考虑边值问题 (1.49a~f) 中变量的线性变换 $x = aX, y = bY, u= UQ$, $v = cR$, 其中 a,b,c 是未知的正常数, U 是入射流的速度, X, Y, Q, R 代表新的 (量纲) 自变量和因变量:

$$Q = Q(X,Y), \quad R = R(X,Y),$$

$$u(x,y) = UQ(X,Y) = UQ\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right), \quad v(x,y)= cR(X,Y) = cR\left(\frac{x}{a},\frac{y}{b}\right).$$

从而有

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0) = \frac{U}{b}\frac{\partial Q}{\partial Y}(X,\ 0), \tag{1.54}$$

边值问题 (1.49a~f) 变换为

$$\frac{U}{a}Q\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{c}{b}R\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\kappa}{b^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}, \tag{1.55a}$$

$$\frac{U}{a}\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{c}{b}\frac{\partial R}{\partial Y} = 0, \quad 0 < X < \infty, 0 < Y < \infty \tag{1.55b}$$

且

$$Q(X,0) = 0, \tag{1.55c}$$

$$R(X,0) = 0, \tag{1.55d}$$

$$Q(X,\infty) = 1, \tag{1.55e}$$

$$Q(0,Y) = 1. \tag{1.55f}$$

根据 (1.55a,b) 的形式, 为方便, 选择 a, b, c, 使得

$$\frac{U}{a} = \frac{c}{b} = \frac{\kappa}{b^2}.$$

因而, 令 $c= 1$, $b = \kappa, a = U\kappa$. 则 (1.55a,b) 不再包含常数:

$$Q\frac{\partial Q}{\partial X} + R\frac{\partial Q}{\partial Y} = \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}, \tag{1.56a}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial Y} = 0, \quad 0 < X < \infty, 0 < Y < \infty, \tag{1.56b}$$

而且

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0) = \frac{U}{\kappa}\frac{\partial Q}{\partial Y}(X,\ 0) = \frac{U}{\kappa}\frac{\partial Q}{\partial Y}\left(\frac{x}{U\kappa},\ 0\right). \tag{1.57}$$

因为 $Q(X, Y)$ 可由 (1.56a,b),(1.55c~f) 的解得到, 所以对于某函数 $h(X)$ 有

$$\frac{\partial Q}{\partial Y}(X,\ 0) = h(X), \tag{1.58}$$

为了确定 $h(X)$, 将量纲分析应用于 (1.58), 得

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial Y}\right] = LT^{-1}, \tag{1.59a}$$

$$[X] = L^{-2}T^{2}. \tag{1.59b}$$

从而易知 (1.58) 约化为

$$h(X) = \sigma X^{-1/2}, \tag{1.60}$$

其中 σ 是待定的无量纲常数. 故 (1.53) 进一步简化为 $g(Ux/\kappa) = \sigma(Ux/\kappa)^{-1/2}$, 从而有

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ 0) = \sigma\left(\frac{U^3}{x\kappa}\right)^{1/2}. \tag{1.61}$$

(3) 进一步将量纲分析应用于全边值问题. 我们现在将量纲分析应用于边值问题 (1.56a,b), (1.55c~f), 将它约化为 ODE 的一个边值问题. 为方便 (但不是必须的), 从 (1.56b) 的形式引入一个势 (流函数) $\psi(X,\ Y)$.

令 $Q = \partial\psi/\partial Y, R = -\partial\psi/\partial X$. 利用单个因变量 ψ, 则边值问题 (1.56a,b), (1.55c~f) 变为

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X}\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3}, \quad 0 < X < \infty,\ 0 < Y < \infty, \tag{1.62a}$$

且

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y}(X,\ 0) = 0, \tag{1.62b}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X}(X, 0) = 0, \tag{1.62c}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y}(X, \infty) = 1, \tag{1.62d}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y}(0,\ Y) = 1. \tag{1.62e}$$

而且由 (1.58) 和 (1.60) 可得

$$\frac{\partial Q}{\partial Y}(X,\ 0) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2}(X,\ 0) = \sigma X^{-1/2}. \tag{1.63}$$

现在用量纲分析简化 $\psi(X, Y)$. 因为边值问题 (1.62a~e) 不包含常数, 所以有

$$\psi = F(X, Y), \tag{1.64}$$

其中 F 为某函数, 并且有

$$[\psi] = [Y] = L^{-1}T, \tag{1.65a}$$

$$[X] = L^{-2}T^2. \tag{1.65b}$$

从而仅仅存在一个可测的无量纲的量. 选择无量纲的量为

$$\pi_1 = \eta = \frac{Y}{\sqrt{X}} \tag{1.66a}$$

和

$$\pi = \frac{\psi}{\sqrt{X}}. \tag{1.66b}$$

因而有

$$\psi(X, Y) = \sqrt{X}G(\eta), \tag{1.67}$$

其中 $G(\eta)$ 满足 ODE 的边值问题, 它是通过将 (1.67) 代入 (1.62a~e) 得到. 而且, 根据 (1.67) 和 (1.63) 可知

$$\sigma = G''(0), \tag{1.68}$$

撇表示关于 η 的微分. 注意, 由

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = G'(\eta), \quad \frac{\partial \psi}{\partial X} = \frac{1}{2}X^{-1/2}[G - \eta G'],$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = X^{-1/2}G'', \quad \frac{\partial^3 \psi}{\partial Y^3} = X^{-1}G''',$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X\, \partial Y} = \frac{1}{2}X^{-1}[-\eta G''], \quad 0 < X < \infty, 0 < Y < \infty$$

可得 $0<\eta<\infty$; $Y=0$, 进而有 $\eta = 0$; 由 $Y \to \infty$ 有 $\eta \to \infty$ 以及由 $X=0$ 有 $\eta \to \infty$. 从而, 边值问题 (1.62a~e) 约化为求解一个关于 $G(\eta)$ 的三阶 ODE, 称为 Blasius 方程:

$$2\frac{\mathrm{d}^3 G}{\mathrm{d}\eta^3} + G\frac{\mathrm{d}^2 G}{\mathrm{d}\eta^2} = 0, \quad 0 < \eta < \infty, \tag{1.69a}$$

且边界条件为

$$G(0) = G'(0) = 0, \quad G'(\infty) = 1. \tag{1.69b}$$

目的是求 $\sigma = G''(0)$.

求解边值问题 (1.69a,b) 的数值程序是打靶法, 这里可以考虑辅助的初值问题

$$2\frac{\mathrm{d}^3H}{\mathrm{d}z^3}+H\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}z^2}=0,\qquad 0<z<\infty,\tag{1.70a}$$

$$H(0)=H'(0)=0,\qquad H''(0)=A,\tag{1.70b}$$

其中 A 是最初的猜测. 可以积分出初值问题 (1.70a,b) 并确定 $H'(\infty)=B$, 其中 $B=B(A)$ 是某数. 用不同的 A 的值继续该程序直至 B 充分接近 1.

现在证明, 利用单参数尺度变换族 (单参数 Lie 尺度变换群) 作用下 (1.70a) 和初始条件 $H(0)=H'(0)=0$ 的不变性, 仅仅需要一次打靶就可以确定 σ.

变换

$$z=\frac{\eta}{\alpha},\tag{1.71a}$$

$$H(z)=\alpha G(\eta)\tag{1.71b}$$

将 (1.70a,b) 映成 (1.69a) 及初始条件

$$G(0)=G'(0)=0,\qquad G''(0)=\frac{A}{\alpha^3},\tag{1.72}$$

其中 $\alpha>0$ 是任意常数. 而且, $H'(\infty)=B$ 意味着

$$G'(\infty)=\frac{B}{\alpha^2}.\tag{1.73}$$

因而, 挑选 α 使得 $\alpha^2=B$, 即 $\alpha=\sqrt{B}$. 则有

$$\sigma=G''(0)=\frac{A}{B^{3/2}}.\tag{1.74}$$

对于任意特殊 A 的值, 根据初值问题 (1.70a,b) 的数值解, 可以证明

$$\sigma=0.332\cdots.\tag{1.75}$$

习　题　1.3

1. 证明: 对于动力和热量单位制, 关于热传导问题 (1.46a~c), 都有 $r(B_2)=4$.

2. 推导 (1.47a~c).

3. 推导 (1.48a~c).

4. 边值问题 (1.46a~c) 仅仅有两个常数 $\kappa=K/\rho c$(扩散率) 和 $\lambda=Q/\rho c$. 用动力单位制中的量纲分析约化 (1.46a~c), 其中 $W_1=x$, $W_2=t$,$W_3=\kappa$,$W_4=\lambda$.

5. 考虑 Rayleigh 流问题 (Schlichting, 1955), 其中无穷平坦金属板静止地陷入不可压缩的流体中. 金属板瞬间加速以至于以常速度 U 平行于自身移动. 令 u 是

U 方向 (x 方向) 的流动速度. 令 y 方向是金属板的法向方向. 图 1.3 展示了这种状态.

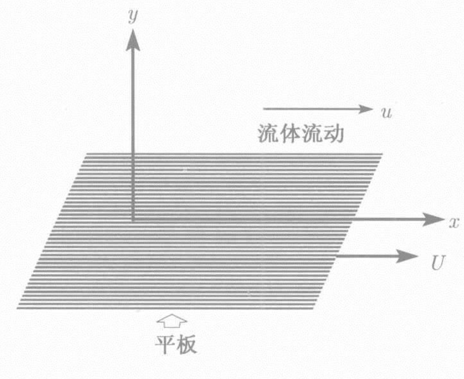


图 1.3

从对称考虑, 可以证明描述这个问题的 Navier-Stokes 方程约化为黏滞扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < t < \infty,\ 0 < y < \infty,\ v = \text{const}, \tag{1.76a}$$

且边值条件为

$$u(y, 0) = 0, \tag{1.76b}$$

$$u(0, t) = U, \tag{1.76c}$$

$$u(\infty, t) = 0. \tag{1.76d}$$

(a) 用量纲分析简化边值问题 (1.76a~d).

(b) 用基于量纲分析的量的尺度变化, 进一步简化 (1.76a~d). 求 (1.76a~d) 的显式的自相似解 $u(y, t)$.

1.4　量纲分析的推广：变量尺度作用下 PDEs 的不变性

1.3.1 节的两个例子中, 用量纲分析将 PDE 的边值问题约化为 ODE 的边值问题是相当麻烦的. 对于热传导问题, 量纲分析的应用依赖于基本量纲 (热量单位) 的正确选择或在使用动力单位之前对常数的有效组合 (习题 1.3.4). 对于 Prandtl-Blasius 问题, 在应用量纲分析之前, 我们先用尺度变量.

约化边值问题的一个更简便的方式是考虑其在单参数尺度族 (单参数 Lie 尺度变换群) 作用下的不变性, 这里它的变量被尺度化, 但边值问题的常数并没有尺度化. 如果边值问题在这样一族尺度变换作用下是不变的, 则自变量的个数可以构

造性地约减一个. 我们证明, 若能通过选择基本量纲, 利用量纲分析约减边值问题中自变量的个数, 则由严格应用于边值问题的变量在尺度变换作用下的不变性, 这样的约化总是可能的 (回顾量纲分析中对变量和常数同时作尺度变换的情形). 而且, 正如后面要证明的, 存在可以利用变量的单参数尺度变换族来约减其自变量的边值问题, 但不论如何选择基本量纲, 都不能利用量纲分析实现自变量个数的约减 (可以认为这是发现新的基本量纲集的一个途径). 因而, 就约减边值问题中自变量的个数而言, 边值问题在单参数尺度变换族作用下的不变性是量纲分析的推广.

Zel'dovich (1956) 称利用量纲分析获得的边值问题的解为第一种自相似解, 而称可用尺度变换但不能用量纲分析得到的边值问题的解为第二种自相似解 (也可以参考文献 Barenblatt and Zel'dovich, 1972; Barenblatt, 1979, 1987, 1996). 1.3.1 节的两个例子表明这两种解的区别有些模糊.

为了给出量纲分析和尺度变换不变性之间关系的一般性定理, 先考虑热传导问题 (1.46a~c) 在尺度变换作用下的不变性.

考虑尺度变换族

$$x^* = \alpha x, \tag{1.77a}$$

$$t^* = \beta t, \tag{1.77b}$$

$$u^* = \gamma u, \tag{1.77c}$$

其中 α, β, γ 是任意正常数.

定义 1.4.1 形如 (1.77a~c) 的变换使得边值问题 (1.46a~c) 保持不变 (边值问题 (1.46a~c) 的不变变换), 当且仅当对于 (1.46a~c) 的任意解 $u = \Theta(x,t)$, 有

$$v(x^*,\ t^*) = u^* = \gamma u = \gamma\,\Theta(x,\ t) \tag{1.78}$$

满足边值问题

$$\rho c\frac{\partial v}{\partial t^*} - K\frac{\partial^2 v}{\partial x^{*2}} = 0, \quad -\infty < x^* < \infty,\ t^* > 0, \tag{1.79a}$$

$$v(x^*, 0) = \frac{Q}{\rho c}\delta(x^*), \tag{1.79b}$$

$$\lim_{x^* \to \pm\infty} v(x^*,\ t^*) = 0. \tag{1.79c}$$

显然, 邻域 $-\infty < x^* < \infty,\ \ t^* > 0$ 对应于 $-\infty < x < \infty,\ t > 0$; $t^* = 0$ 对应于 $t = 0$; $x^* \to \pm\infty$ 对应于 $x \to \pm\infty$. 因此, (1.77a~c) 使得边值问题 (1.46a~c) 的边界保持不变.

引理 1.4.1 如果尺度变换 (1.77a~c) 使得边值问题 (1.46a~c) 的边界保持不变, 且 $u = \Theta(x,t)$ 满足 (1.46a~c), 则 $u = \gamma\,\Theta(x/\alpha,\ t/\beta)$ 也满足 (1.46a~c).

证明留作习题 1.4.1.

(1.77a~c) 保持边值问题 (1.46a~c) 的边界不变的充分条件是 (1.46a~c) 的每个方程都是不变的. (1.46a) 的不变性意味 $u=\Theta(x,\ t)$ 满足 (1.46a) 当且仅当 $v=\gamma\ \Theta(x,\ t)$ 满足 (1.79a). 这导致 $\beta=\alpha^2$. 类似地, (1.46b,c) 的不变性导致 $\gamma=1/\alpha$. 因而, (1.46a~c) 拥有如下的单参数 ($\alpha>0$) 尺度变换族

$$x^*=\alpha x, \tag{1.80a}$$

$$t^*=\alpha^2 t, \tag{1.80b}$$

$$u^*=\alpha^{-1}u. \tag{1.80c}$$

显然, 如果 $u=\Theta(x,\ t)$ 满足 (1.46a~c), 则

$$v(x^*,\ t^*)=\Theta(x^*,\ t^*)=\Theta(\alpha x,\ \alpha^2 t) \tag{1.81}$$

满足 (1.79a~c). 故变换 (1.80a~c) 将 (1.79a~c) 的任意解 $v=\Theta(x^*,\ t^*)$ 映成 (1.79a~c) 的解

$$v=\alpha^{-1}\Theta(x,\ t)=\alpha^{-1}\Theta(\alpha^{-1}x^*,\ \alpha^{-2}t^*),$$

或等价地, 将 (1.46a~c) 的任意解 $u=\Theta(x,t)$ 映成 (1.46a~c) 的解 $u=\alpha^{-1}\Theta(\alpha^{-1}x,\alpha^{-2}t)$.

(1.46a~c) 的解以及 (1.79a~c) 的解是唯一的. 由此唯一性可知, (1.46a~c) 的解 $u=\Theta(x,\ t)$ 一定满足泛函方程

$$\Theta(x^*,\ t^*)=\alpha^{-1}\Theta(x,\ t). \tag{1.82}$$

源于单参数 Lie 变换群作用下不变性的 PDE 的解, 称为相似解或不变解. 不变解所满足的泛函方程 (1.82) 称为不变曲面条件. 源于单参数 Lie 尺度变换群 (如 (1.80a~c)) 作用下不变性的不变解, 也称为自相似解或自模拟解.

根据 (1.80a,b), 不变曲面条件 (1.82) 约化为

$$\Theta(\alpha x,\ \alpha^2 t)=\alpha^{-1}\Theta(x,\ t). \tag{1.83}$$

为了求解 (1.83), 令 $z=x/\sqrt{t}$, $\Theta(x,\ t)=(1/\sqrt{t})\phi(z,t)$. 则利用 $z,\ t,\ \phi(z,\ t)$, (1.83) 变为

$$\alpha\Theta(\alpha x,\alpha^2 t)=\Theta(x,t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\phi(z,t)=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 t}}\phi(z,\alpha^2 t)=\frac{\phi(z,\alpha^2 t)}{\sqrt{t}}.$$

因而, $\phi(z,t)$ 满足泛函方程

$$\phi(z,\ t)=\phi(z,\ \alpha^2 t), \tag{1.84}$$

对任意 $\alpha > 0$. 故 $\phi(z,t)$ 不依赖时间 t . 对于边值问题 (1.46a~c) 的解, 这导致不变形式 (相似形式)

$$u = \Theta(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{t}}F(z), \tag{1.85}$$

z 称为相似变量. 将 (1.85) 代入 (1.46a~c) 导致关于未知函数 $F(z)$ 的 ODE 的边值问题. 详细过程留作习题 1.4.2.

现在考虑联系量纲分析和尺度变换作用下不变性的定理.

定理 1.4.1 如果通过量纲分析, PDE 的边值问题中的自变量的个数减少 ρ 个, 则利用 ρ 参数尺度变换族作用下边值问题的不变性, 也可使自变量的个数减少 ρ 个, 且 $\rho = r(B) - r(B_2)$.

证明 考虑由 (1.44a,b) 和 (1.45) 定义的量纲矩阵 B, B_1 和 B_2. 通过量纲分析, 给定边值问题的自变量的个数减少 $\rho = r(B) - r(B_2)$ 个.

任意基本量纲的任意尺度变换用 m 个参数尺度变换族

$$L_j^* = \mathrm{e}^{\varepsilon_j} L_j, \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{1.86}$$

表示, 其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 是任意实常数. 令

$$\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m], \tag{1.87}$$

ε 是行向量. 尺度变换 (1.86) 导致每个可测量 W_i 的值的尺度变换

$$W_i^* = \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j b_{ji}} W_i = \mathrm{e}^{(\varepsilon B)_i} W_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.88}$$

其中 $(\varepsilon B)_i$ 是 n 分量行向量 εB 的第 i 个分量. u 的值尺度变化为

$$u^* = \mathrm{e}^{\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_j} u. \tag{1.89}$$

根据 Buckingham Pi 定理中假设 (4), 由基本量纲 (1.86) 的 m 参数尺度变换族导致的尺度变换族 (1.88), (1.89) 使得给定的边值问题保持不变. 我们的目的是寻找换族 (1.88), (1.89) 的子族中基本参数的个数, 其中所有常数不变, 即目的是发现所有向量 $\varepsilon = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m]$ 构成的向量空间的量纲, 使得

$$W_i^* = W_i, \quad i = l+1, l+2, \cdots, n, \tag{1.90a}$$

$$W_j^* \neq W_j, \quad 对某些 j = 1, 2, \cdots, l. \tag{1.90b}$$

方程 (1.90a) 成立当且仅当

$$\varepsilon B_2 = 0. \tag{1.91}$$

基本参数的个数是 (1.91) 的线性无关解 ε 的个数, 且 $\varepsilon B_1 \neq 0$.

下面引入几个有用的定义和符号:

令 A 是作用在向量空间 V 上的矩阵线性变换, 以致于如果 $v \in V$ 是一个行向量, 则 vA 是 A 在 v 上的作用. A 的零空间为向量空间 $V_{(A)_N} = \{\varepsilon \in V : \varepsilon A = 0\}$, A 的列空间是向量空间 $V_{(A)_R} = \{z : \ z = \varepsilon A, \ \varepsilon \in V\}$, $\dim V$ 是向量空间 V 的量纲 (维数). 由此可知

$$\dim V = \dim V_{(A)_R} + \dim \ V_{(A)_N}.$$

考虑由 (1.44a,b) 和 (1.45) 定义的矩阵 B, B_1 和 B_2. 令 V 是 R^m, 其中 m 是这三个矩阵的行数, 以致于有 $\dim V = m$. 则 $\dim \ V_{(B)_N}$ 是方程组 $\varepsilon B = 0$ 的线性无关解 ε 的个数, $\dim V_{(B_2)_N}$ 是方程组 $\varepsilon B_2 = 0$ 的线性无关解 ε 的个数. 因此可知

$$\dim \ V_{(B_2)_N} = m - r(B_2), \quad \dim \ V_{(B)_N} m - r(B) = m - r(B_2) - \rho.$$

因为 $V_{(B_2)_N(B_1)_N} = V_{(B)_N}$, 于是可知

$$\dim V_{(B_2)_N} = \dim V_{(B_2)_N(B_1)_N} + \dim V_{(B_2)_N(B_1)_R} = \dim V_{(B)_N} + \dim V_{(B_2)_N(B_1)_R}.$$

从而有 $\dim V_{(B_2)_N(B_1)_R} = \rho$. 但是 $\dim V_{(B_2)_N(B_1)_R}$ 是方程组 $\varepsilon B_2 = 0$ 的线性无关解 ε 的个数且 $\varepsilon B_1 \neq 0$. 故基本参数的个数为 ρ, 证毕.

习　题　1.4

1. 证明引理 1.4.1.

2. 建立由 (1.85) 定义的关于 $F(z)$ 的边值问题. 用

(a) 动力单位;

(b) 热量单位

将该边值问题化为无量纲形式, 并解释.

3. 考虑半空间中的扩散, 其扩散系数依赖于浓度且与浓度成正比. 假设最初和无穷远处浓度为零. 我们仅考虑 x=0 上的浓度变化率 $C_x(0, t)$. 在特定单位系统中, $C(x, t)$ 满足边值问题

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial C}{\partial x}\right), \quad 0 < x < \infty, \ 0 < t < \infty, \tag{1.92a}$$

其中

$$C(x, 0) = C(\infty, t) = 0, \quad C(0, t) = A. \tag{1.92b}$$

(a) 尽可能有效地利用相似性确定 $C_x(0, t)$.

(b) 用尺度不变性将边值问题 (1.92a,b) 约化为 ODE 的边值问题.

(c) 基于 (b) 中推导的边值问题的尺度不变性, 讨论确定 $C_x(0, t)$ 的数值计算程序.

4. 对于零角度攻击的半无穷楔子的边界层流动问题, 其模型为 PDE

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-U(x)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\quad 0<x<\infty,\ 0<y<\infty,$$

且边界条件为 $u(x,\,0)=v(x,0)=0,\ \lim\limits_{y\to\infty}\ u(x,\,y)=U(x),\,U(x)=Ax$, 其中 A,l 是常数且 $l=\beta/(2-\beta)$ 对应于半无穷楔子的张开角 $\pi\beta$. 此问题中, x 是楔子曲面上的翼的长度, y 表示距离楔子曲面的长度 (见图 1.4). 如 Prandtl 边界层方程 (1.49a,b) 的情形, 引入流量函数 $\psi(x,\,y)$. 用尺度变换不变性将给定的问题约化为 ODE 的边值问题. 选择坐标, 使得如果 l=0 , 则有 Blasius 方程.

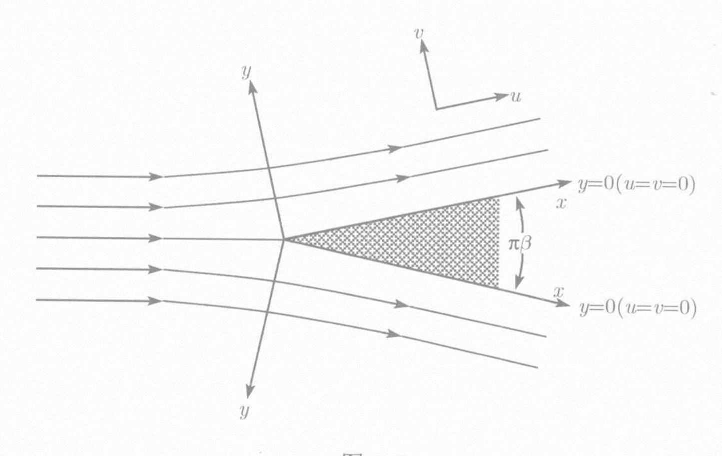


图 1.4

5. 下面非线性扩散方程的边值问题源于软组织的两阶段连续体模型 (Holmes, 1984):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-K\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad 0<x<\infty,\ 0<t<\infty,$$

其中 K 是 $\partial u/\partial x$ 的函数, 且边界条件为 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=-1,u(\infty,\ t)=u(x,\ 0)=0$. 约化该问题为一个 ODE 的边值问题.

6. 用尺度变换作用下变量的不变性求解 Rayleigh 流问题 (1.76a~d).

7. 根据源于动力单位的无量纲形式, 再次考虑热传导的源问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<\infty,\ \ t>0,$$

$$u(x,0)=\delta(x),$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0.$$

利用变量在尺度变换 (1.80a~c) 下的不变性可导致相似解 $u = (1/\sqrt{t})G(x/\sqrt{t})$.

(a) 证明：对于任意常数 $\beta(-\infty < \beta < \infty)$, 该问题在单参数变换族

$$x^* = x - \beta t, \quad t^* = t, \quad u^* = u\mathrm{e}^{(1/2)\beta x-(1/4)\beta^2 t} \tag{1.93}$$

作用下是不变的.

(b) 验证 t 和 $u\mathrm{e}^{x^2/4t}$ 是这些变换的不变量.

(c) 证明：这些变换导致相似形式

$$u(x,t) = H(t) = \mathrm{e}^{-x^2/4t}. \tag{1.94}$$

因而证明尺度变换 (1.80a~c) 作用下的不变性和变换 (1.93) 导致熟知的基本解

$$u(x,\ t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

1.5 讨　论

为了设计恰当的模型试验, 对于探知源于实际问题中的基本量纲和所导致的基本量, 量纲分析是必要的. 如果给定问题可以用偏微分方程组的边值问题描述, 则量纲分析或可导致自变量的减少. 而且, 如果这样的约化存在, 则总能通过边值问题在尺度变换下的不变性来实现, 且尺度变换仅仅作用于变量.

正如将在第 4 章讨论的, PDEs(或更特殊地, 边值问题) 在尺度变换作用下的不变性可被推广到任意单参数 Lie 点变换群的情形. 而且, 对于给定的微分方程, 那样的变换可以算法化的得到 (例如, 可以容易地推导变换 (1.93) 和 (1.94)). 这可以由那样变换的性质得到, 最重要的是它们的特征是由无穷小生成元所表示的 (参看第 2 章).

关于量纲分析在各种领域中的应用的文献包括: (de Jong, 1967) (经济学); (Sedov, 1982; Birkhoff, 1950; Barenblatt, 1979, 1987, 1996; Zierep, 1971) (力学、弹性力学、流体力学); (Venikov, 1969) (电机工程); (Taylor, 1974) (机械工程); (Becker, 1976) (化学工程); (Haynes, 1982) (地理学); (Kurth, 1972) (天体物理学); (Murota, 1985) (系统分析); (Schepartz, 1980; Barenblatt, 1987) (生物医学). 关于量纲分析和尺度不变性应用于边值问题的例子, 参看文献 (Sedov, 1982; Birkhoff, 1950; Barenblatt, 1979, 1996; Dresner, 1983, 1999; Hansen, 1964; Zierep, 1971; Seshadri and Na, 1985). 利用尺度将 ODEs 的边值问题转化为初值问题的例子, 参看文献 (Klamkin, 1962; Na, 1967, 1979; Dresner, 1983, 1999; Seshadri and Na, 1985). 分形与自相似性有关 (Mandelbrot, 1977, 1982); 自相似性、渐近性与重正规化群之间存在重要的联系 (Barenblatt, 1996; Goldenfeld, 1992; Cole and Wagner, 1996).

第2章　Lie 变换群与无穷小变换

2.1　简　　介

在量纲分析中, 基本量纲的尺度变换 (1.86)、诱导的可测量的尺度变换、诱导的所有量的尺度变换 (1.88), (1.89) 以及诱导的保留所有常数的尺度变换 (1.88), (1.91) 都是 Lie 变换群的例子. 从发现 PDEs 解的观点出发, 如果变换局限于尺度、平移和旋转变换, 则发展 Lie 变换群的一般理论是不必要的. 然而, 证实存在更广类的变换使得 PDEs 保持不变. 为了应用和发掘那样的变换, Lie 变换群的无穷小刻画的特性是至关紧要的.

Sophus Lie 引入连续变换群的概念, 是为了整理大量的求解 ODEs 的技巧. 他是受他的同事 Sylow(挪威人) 关于 Abel 和 Galois 的解代数方程的工作的讲座的启发.

Lie 变换群是用无穷小生成元来刻画的. Lie 给出了寻找给定微分方程的点变换的所有无穷小生成元的一个算法, 更一般的是关于接触对称的算法. 重要的是, 对于给定微分方程, Lie 变换群的基本应用仅仅要求所拥有的无穷小生成元的内容.

点变换作用在微分方程的自变量和因变量的空间上. Lie 点变换群自然地可以推广到作用在包含因变量的任意有限阶导数的空间上. Lie 变换群的无穷小生成元中的函数满足超定的线性微分方程组. 这些函数在点变换情况中仅仅依赖自变量和因变量, 对于接触变换情况, 却包含因变量的一阶导数. 更一般地, 计算方法以及无穷小生成元的很多应用可以推广到高阶局部变换的无穷小生成元, 且允许它们生成元中的函数依赖有限个高阶导数.

微分方程的 Lie 变换群对应于将它的解映成同样微分方程的另一个解的映射. 如果自变量可以任意改变, 则存在无穷多种方式来表示那样的映射. 如果自变量保持固定, 则那样的表示是唯一的. 当推广 Lie 的算法用于微分方程所拥有的高阶局部变换的计算和应用, 以及将 Lie 的关于一阶 ODEs 的积分因子的工作推广到高阶 ODEs 时, 这种观点是重要的.

2.2　Lie 变换群

首先定义群, 然后考虑变换群, 特别是单参数 Lie 变换群. 这里变换作用在 $\mathbf{R}^n$ 上.

2.2.1 群

定义 2.2.1.1　群 G 是满足组合律 ϕ 的元素的集合, 并且元素之间满足如下的公理:

(1) 封闭性. 对 G 的任意元素 a, b, $\phi(a, b)$ 是 G 的元素.

(2) 结合性. G 的任意元素 a,b, c 满足

$$\phi(a, \phi(b, c)) = \phi(\phi(a, b), c).$$

(3) 单位元. 存在 G 的唯一的单位元 e, 使得对 G 的任意元素 a, 有

$$\phi(a, e) = \phi(e, a) = a.$$

(4) 逆元. 对 G 的任意元素 a, G 中存在唯一的逆元 a^{-1}, 有

$$\phi(a, a^{-1}) = \phi(a^{-1}, a) = e.$$

定义 2.2.1.2　如果对 G 的所有元素 a,b, 有 $\phi(a, b) = \phi(b, a)$, 那么 G 为 Abel 群.

定义 2.2.1.3　具有同样组合律 ϕ 的 G 的子集构成 G 的子群.

2.2.2 群的举例

(1) G 为所有整数的集合, 且 $\phi(a, b) = a + b$, 这里 e =0, $a^{-1} = -a$.

(2) G 为所有正实数的集合, 且 $\phi(a, b)$=$a \cdot b$, 这里 $e = 1$, a^{-1}= $1/a$.

(3) G 为对称 (变换) 的集合, 使得两面具有同样颜色的等边三角形 ABC 保持不变 (如图 2.1).

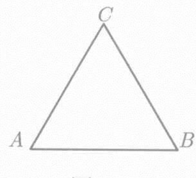


图 2.1

这里, 群用顶点 A, B, C 的所有置换表示. 单位元为 e= (1, 2, 3) 对应于位于 A 的顶点 1、位于 B 的顶点 2 以及位于 C 的顶点 3(如图 2.2(a)). 旋转元 R =(3, 1, 2) 对应于图 2.1 的外形绕通过三角形的中心的穿过页面的轴顺时针旋转 2π/3 弧度. 结果, 顶点 3 位于 A, 顶点 1 位于 B 以及顶点 2 位于 C. 翻转元 r = (3, 2, 1) 表示图 2.1 的外形绕关于所表示的垂线旋转 π 弧度. 结果, 顶点 3 位于 A, 顶点 2 位于 B 以及顶点 1 位于 C(如图 2.2(c)).

元素 $\phi(R,R)$ = R= (2,3,1) 表示图 2.1 的外形顺时针旋转 4π/3 弧度 (如图 2.2(d)). 它是顺时针旋转 2π/3 弧度后再顺时针旋转 2π/3 弧度的结合. 结合元素 $\phi(R, R)$=rR=(2,3,1) 表示顺时针旋转 2π/3 弧度后再翻转一次的结合 (图 2.2(e)). 结合元素 $\phi(R,R)$=Rr=(2,3,1) 表示翻转一次后再顺时针旋转 2π/3 弧度的结合 (图 2.2(f)). 将证明等边三角形的对称构成一个 6 元素群留作习题 2.3.1. 注意, 该群不是 Abel 群, 因为 $\phi(r, R) \neq \phi(R, r)$.

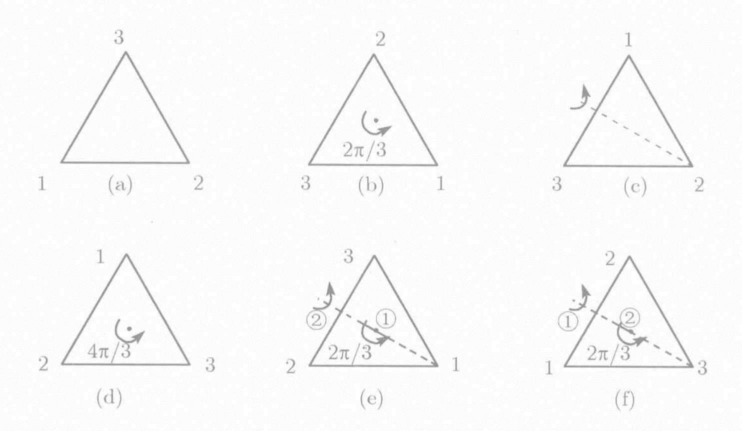


图 2.2 等边三角形的对称群: (a) 单位元; (b) 弧度的旋转; (c) 翻转, r; (d) 旋转 $4\pi/3$,$\phi(R,R)$; (e) 翻转 $\phi(R,r)$ 后旋转 $2\pi/3$; (f) 旋转 $2\pi/3$ 后翻转 $\phi(r,R)$

2.2.3 变换群

定义 2.2.3.1 令 $x=(x_1,\ x_2\ ,\cdots,\ x_n)$ 位于区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 中, 对于 D 中的每个元素 x 和集合 $S\subset\mathbf{R}$ 中的参数 ε, $\phi(\varepsilon,\delta)$ 定义了 S 中参数 ε 和 δ 之间的组合律, 则变换集合

$$x^*=X(x;\varepsilon) \tag{2.1}$$

构成 D 上的单参数变换群, 如果下面条件成立:

(1) 对 S 中的每个 ε, 变换在 D 上是一对一的, 因此 $x^*\in D$.

(2) 具有组合律 ϕ 的 S 组成一个群 G.

(3) 对 D 中每个 x, $x^*=x$, 当 $\varepsilon=\varepsilon_0$ 对应于单位元 e, 即 $X(x;\varepsilon_0)=x$.

(4) 如果 $x^*=X(x;\varepsilon), x^{**}=X(x^*;\delta)$, 那么 $x^{**}=X(x;\phi(\varepsilon,\delta))$.

2.2.4 单参数 Lie 变换群

定义 2.2.4.1 除了满足定义 2.2.3.1 的条件外, 如果还满足:

(5) ε 为连续参数, 即 S 为 $\mathbf{R}$ 上的闭集. 不失一般性, $\varepsilon=0$ 对应于单位元 e.

(6) X 为 D 上关于 x 是无穷次可微的, 并且是 S 中 ε 的解析函数.

(7) $\phi(\varepsilon,\ \delta)$ 为 ε 和 δ 的解析函数, $\varepsilon\in S, \delta\in S$.

那么单参数变换群称为单参数 Lie 变换群.

如果将 ε 作为时间变量, x 为空间变量, 那么, 单参数 Lie 变换群事实上定义了定常流. 这将在 2.3 节中讨论. 现在可以简单说明如下：令

$$X(x;\varepsilon) \tag{2.2}$$

定义了所有元素 $\varepsilon \in S$ 上的 x 的演化, 就定义了曲线 γ_1(图 2.3(a)).

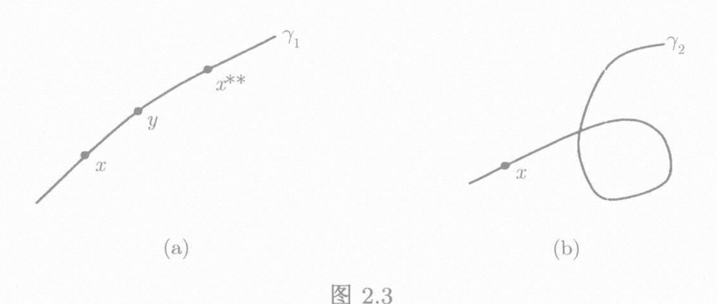


图 2.3

现在, 令 $y = X(x;\varepsilon)$ 代表 γ_1 上点, 那么 $x^{**} = X(y;\delta) = X(x;\ \phi(\varepsilon,\ \delta))$ 一定位于 γ_1 上. 注意, 自交叉曲线 γ_2(图 2.3(b)) 不能代表 (2.2) 所定义的演化.

2.2.5 单参数 Lie 变换群举例

1. 平面上的变换群

考虑变换群

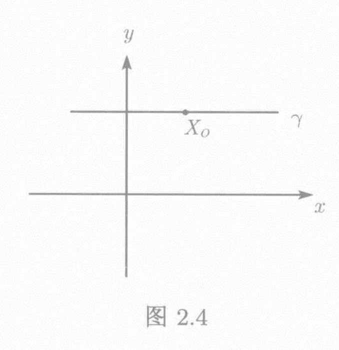


图 2.4

$$x^* = x + \varepsilon,$$
$$y^* = y, \quad \varepsilon \in \mathbf{R},$$

这里 $\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta$. 这个群相应于平行于 x 轴平移. 图 2.4 中曲线 γ 代表演化 $X(x_0;\varepsilon)$.

2. 平面上的尺度群

考虑尺度群

$$x^* = \alpha x,$$
$$y^* = \alpha^2 y, \quad 0 < \alpha < \infty,$$

这里 $\phi(\alpha,\beta) = \alpha\beta$, 且单位元对应于 $\alpha = 1$. 令 $\varepsilon = \alpha - 1$, 那么这个变换群可以重新参数化为

$$x^* = (1+\varepsilon)x, \tag{2.3a}$$
$$y^* = (1+\varepsilon)^2 y, \quad -1 < \varepsilon < \infty, \tag{2.3b}$$

因此单位元为 $\varepsilon = 0$, 参数的组合律为

$$\phi(\varepsilon,\delta) = \varepsilon + \delta + \varepsilon\delta. \tag{2.4}$$

习 题 2.2

1. 证明: 两个面涂有同样颜色的等边三角形的对称构成 6 元素群. 如果两个面涂成不同的颜色呢?

2. 证明：图 2.3(b) 的曲线并不表示变换 (2.2).

3. 证明：变换

$$x^* = x + 2\varepsilon, \tag{2.5a}$$

$$y^* = y + 3\varepsilon, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \ \ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \tag{2.5b}$$

定义了一个 Lie 变换群. 画出该群作用下从点 (0,0) 到 (1,0) 的变化曲线. 解释所得到曲线的几何情况.

4. 证明：结合律为 $\phi(\varepsilon,\ \delta) = \varepsilon + \delta + \varepsilon\delta$ 的集合 $S = \{\varepsilon:\ -1 < \varepsilon < \infty\}$ 定义了一个群.

5. 对于 Lie 变换群 (2.3a,b), 作出点 (1,0), (1,1) 和 (0,0) 的曲线.

6. 证明：变换 (1.93) 定义了作用在

(a) $(x,\ t)$ 空间;

(b) $(x,\ t, u)$ 空间

上的单参数 Lie 变换群

7. 证明：下面每个平面的单参数变换族定义了 Lie 变换群：

(a) $x^* = x - \varepsilon y,\ y^* = y + \varepsilon x$;

(b) $y^* = x + \varepsilon^2,\ y^* = y$;

(c) $x^* = x + \varepsilon,\ y^* = \dfrac{xy}{x + \varepsilon}$.

2.3 无穷小变换群

考虑单参数 (ε)Lie 变换群

$$x^* = X(x; \varepsilon), \tag{2.6}$$

单位元为 $\varepsilon = 0$, 组合律为 ϕ. 在 $\varepsilon = 0$ 附近展开 (2.6) 式, 得

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon\left(\left.\frac{\partial X(x;\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\left.\frac{\partial^2 X(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}\right) + \cdots \\ &= x + \varepsilon\left(\left.\frac{\partial X(x; \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

令

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial X(x;\ \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{2.8}$$

变换 $x + \varepsilon\xi(x)$ 称为 Lie 变换群 (2.6) 的无穷小变换. 相应地, $\xi(x)$ 叫做 (2.6) 的无穷小.

2.3.1 Lie 第一基本定理

首先给出下面的引理：

引理 2.3.1.1 单参数 (ε) Lie 变换群 (2.6) 满足关系

$$X(x;\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)=X(X(x;\ \varepsilon);\ \phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)). \tag{2.9}$$

证明

$$\begin{aligned}X(X(x;\ \varepsilon);\ \phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon+\Delta\varepsilon))&=X(x;\ \phi(\varepsilon,\ \phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)))\\&=X(x;\ \phi(\phi(\varepsilon,\ \varepsilon^{-1}),\ \varepsilon+\Delta\varepsilon))\\&=X(x;\ \phi(0,\ \varepsilon+\Delta\varepsilon))\\&=X(x;\ \varepsilon+\Delta\varepsilon).\end{aligned}$$

□

定理 2.3.1.1(Lie 第一基本定理) 存在参数化 $\tau(\varepsilon)$, 使得 Lie 变换群 (2.6) 等价于一阶常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\tau}=\xi(x^*), \tag{2.10a}$$

且

$$x^*=x \tag{2.10b}$$

当 $\tau=0$ 时的解. 特别地,

$$\tau(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon')\ \mathrm{d}\varepsilon', \tag{2.11}$$

其中

$$\Gamma(\varepsilon)=\left.\frac{\partial\phi(a,b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)}, \tag{2.12}$$

$$\Gamma(0)=1, \tag{2.13}$$

ε^{-1} 表示 ε 的逆元.

证明 首先证明由 (2.6) 导出 (2.10a,b)~(2.12). 将 (2.9) 的左侧在 $\Delta\varepsilon$=0 处展开为 $\Delta\varepsilon$ 的级数得

$$X(x;\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)=x^*+\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2), \tag{2.14}$$

其中 x^* 由 (2.6) 确定. 那么, 将 $\phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)$ 在 $\Delta\varepsilon$=0 处展开为 $\Delta\varepsilon$ 的级数, 得

$$\phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon+\Delta\varepsilon)=\phi(\varepsilon^{-1},\ \varepsilon)+\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2)=\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2), \tag{2.15}$$

这里 $\Gamma(\varepsilon)$ 满足 (2.12). 于是, 通过将 (2.9) 的右侧在 $\Delta\varepsilon=0$ 处展开为 $\Delta\varepsilon$ 的级数, 得

$$\begin{aligned}X(x;\,\varepsilon+\Delta\varepsilon)&=X(x^*;\,\phi(\varepsilon^{-1},\,\varepsilon+\Delta\varepsilon))=X(x^*;\,\Gamma(\varepsilon)\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2))\\&=X(x^*;\,0)+\Delta\varepsilon\Gamma(\varepsilon)\left(\left.\frac{\partial X(x^*;\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0}\right)+O((\Delta\varepsilon)^2)\\&=x^*+\Gamma(\varepsilon)\xi(x^*)\,\Delta\varepsilon+O((\Delta\varepsilon)^2).\end{aligned}\tag{2.16}$$

平衡 (2.4) 和 (2.6) 可知, $x^*=X(x;\varepsilon)$ 满足如下微分方程系统的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=\Gamma(\varepsilon)\xi(x^*),\tag{2.17a}$$

$$x^*=x,\quad 在\varepsilon=0处.\tag{2.17b}$$

由 (2.7) 可得 $\Gamma(0)=1$. 参数化 $\tau(\varepsilon)=\int_0^{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon')\,\mathrm{d}\varepsilon'$ 可得 (2.10a,b).

因为 $\partial\xi(x)/\partial x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是连续的, 所以根据一阶微分方程组初值问题的存在唯一性定理 (Coddington, 1961) 知, (2.10a,b) 的解存在且唯一, 进而得 (2.17a,b) 的解存在且唯一, 这个解就是 (2.6). 于是完成了 Lie 第一基本定理的证明. □

Lie 第一基本定理表明, 无穷小变换包含确定单参数 Lie 变换群的基本信息. 因为一阶常微分方程组 (2.10a) 在关于 τ 的平移变换下不变, 因此, 总可以根据参数 τ 来重新参数化给定的群, 结果对于参数 τ_1 和 τ_2 , 结合律变为 $\phi(\tau_1,\,\tau_2)=\tau_1+\tau_2$. Lie 第一基本定理也表明, 单参数 Lie 变换群 (2.6) 定义了由 (2.10a,b) 确定的定态流, 并且任意定态流 (2.10a,b) 定义一个单参数 Lie 变换群.

2.3.2 Lie 第一基本定理应用举例

1. 平面上的平移群

对于平移群

$$x^*=x+\varepsilon,\tag{2.18a}$$

$$y^*=y,\tag{2.18b}$$

结合律为 $\phi(a,\,b)=a+b$, $\varepsilon^{-1}=-\varepsilon$. 那么 $\partial\phi(a,b)/\partial b=1$, 因此有 $\Gamma(\varepsilon)\equiv1$.

令 $x=(x,y)$, 那么群 (2.18a,b) 变为 $X(x;\varepsilon)=(x+\varepsilon,y)$. 因而 $\partial X(x;\varepsilon)/\partial\varepsilon=(1,\,0)$. 从而有

$$\xi(x)=\left.\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=(1,\,0).$$

于是 (2.17a,b) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=1,\quad\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\varepsilon}=0,\tag{2.19a}$$

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad \varepsilon = 0, \tag{2.19b}$$

易知初值问题 (2.19a,b) 的解是由 (2.18a,b) 确定的.

2. *尺度群*

对于尺度群

$$x^* = (1+\varepsilon)x, \tag{2.20a}$$

$$y^* = (1+\varepsilon)^2 y, \quad -1 < \varepsilon < \infty, \tag{2.20b}$$

结合律为 $\phi(a,\, b) = a + b + ab, \varepsilon^{-1} = -\varepsilon/(1+\varepsilon)$, 这里 $\partial\phi(a,\ b)/\partial b = 1 + a$, 因而知

$$\Gamma(\varepsilon) = \left.\frac{\partial\phi(a,\ b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1},\varepsilon)} = 1 + \varepsilon^{-1} = \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

令 $x = (x, y)$, 那么群 (2.20a,b) 变为 $X(x;\varepsilon) = ((1+\varepsilon)x,\ (1+\varepsilon)^2 y)$. 因此有 $\partial X(x;\varepsilon)/\partial\varepsilon = (x,\ 2(1+\varepsilon)y)$ 和

$$\xi(x) = \left.\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = (x,\ 2y).$$

于是 (2.17a,b) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{x^*}{1+\varepsilon}, \quad \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{2y^*}{1+\varepsilon}, \tag{2.21a}$$

$$x^* = x, \quad y^* = y, \quad \varepsilon = 0. \tag{2.21b}$$

显然, 初值问题 (2.21a,b) 的解是由 (2.20a,b) 确定的.

根据参数化

$$\tau = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon')\ \mathrm{d}\varepsilon' = \int_0^\varepsilon \frac{1}{1+\varepsilon'}\ \mathrm{d}\varepsilon' = \log(1+\varepsilon),$$

群 (2.20a,b) 变为

$$x^* = \mathrm{e}^\tau x, \tag{2.22a}$$

$$y^* = \mathrm{e}^{2\tau} y, \quad -\infty < \tau < \infty, \tag{2.22b}$$

且结合律为 $\phi(\tau_1,\, \tau_2) = \tau_1 + \tau_2$.

2.3.3　无穷小生成元

根据 Lie 第一基本定理, 以下不失一般性, 假设单参数 (ε)Lie 变换群是参数化的, 其结合律满足 $\phi(a,\ b) = a + b$, 因此 $\varepsilon^{-1} = -\varepsilon$ 和 $\Gamma(\varepsilon) \equiv 1$. 于是由它的无穷小 $\xi(x)$, 单参数 Lie 变换群 (2.6) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = \xi(x^*), \tag{2.23a}$$

$$x^* = x, \quad \varepsilon = 0. \tag{2.23b}$$

定义 2.3.3.1 单参数 Lie 变换群 (2.6) 的无穷小生成元为算子

$$X = X(x) = \xi(x) \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.24}$$

这里 ∇ 为梯度算子

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right). \tag{2.25}$$

对任意可微函数 $F(x) = F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 可知

$$XF(x) = \xi(x) \cdot \nabla F(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_i},$$

注意 $Xx = \xi(x)$.

因此, 根据 Lie 第一基本定理, 由无穷小变换确定的单参数 Lie 变换群也是由它的无穷小生成元确定的. 下面的定理表明, 利用无穷小生成元 (2.24) 可以得到一个求初值问题 (2.23a,b) 的显式解算法.

定理 2.3.3.1 单参数 Lie 变换群 (2.6) 等价于

$$x^* = \mathrm{e}^{\varepsilon X} x = x + \varepsilon X x + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 x + \cdots = \left[1 + \varepsilon X + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 + \cdots \right] x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} X^k x, \tag{2.26}$$

其中算子 $X = X(x)$ 由 (2.24) 确定, 算子 $X^k = X^k(x)$ 由 $X^k = XX^{k-1}$, $k = 1, 2, \cdots$ 确定. 特别地, 将算子 X 作用于函数 $X^{k-1}F(x)$, $k = 1, 2, \cdots$ 且 $X^0 F(x) \equiv F(x)$. 可得到函数 $X^k F(x)$.

证明 令

$$X = X(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.27a}$$

$$X(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x^*) \frac{\partial}{\partial x_i^*}, \tag{2.27b}$$

其中

$$x^* = X(x; \varepsilon) \tag{2.28}$$

为 Lie 变换群 (2.6). 根据 Taylor 定理, 将 (2.28) 在 ε=0 处展开, 得

$$x^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\left. \frac{\partial^k X(x;\varepsilon)}{\partial \varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \left(\left. \frac{\mathrm{d}^k x^*}{\mathrm{d}\varepsilon^k} \right|_{\varepsilon=0} \right). \tag{2.29}$$

对于任意可微函数 $F(x)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} F(x^*) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i^*} \frac{\mathrm{d}x_i^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x^*) \frac{\partial F(x^*)}{\partial x_i^*} = X(x^*) F(x^*). \tag{2.30}$$

因此可知

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = X(x^*)x^*, \tag{2.31a}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^*}{\mathrm{d}\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right) = X(x^*)X(x^*)x^* = X^2(x^*)x^*, \tag{2.31b}$$

一般地

$$\frac{\mathrm{d}^kx^*}{\mathrm{d}\varepsilon^k} = X^k(x^*)x^*, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{2.31c}$$

因此有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^kx^*}{\mathrm{d}\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = X^k(x)x = X^kx, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{2.32}$$

于是可得 (2.26). □

因此, 如果函数 $X(x;\varepsilon)$ 定义一个 Lie 变换群 (2.6), 且结合律为 $\phi(a,b) = a + b$, 那么该函数在 $\varepsilon = 0$ 处的 Taylor 级数展开是由它的 $O(\varepsilon)$ 项的系数确定的, 该系数为无穷小

$$\left.\frac{\partial X(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \xi(x).$$

总之, 存在两种从它的无穷小变换来发现显式的单参数 Lie 变换群的方法:

(1) 根据幂级数 (2.26) 来表示群, 该级数称为 Lie 级数. 这从对应于无穷小变换的无穷小生成元得到.

(2) 通过显式地发现一阶微分方程组 (2.23a) 的通解来求解初值问题 (2.23a,b).

推论 2.3.3.1 若 $F(x)$ 为无穷次可微的, 那么对于具有无穷小生成元 (2.27a) 的单参数 Lie 变换群 (2.6), 则有

$$F(x^*) = F(\mathrm{e}^{\varepsilon X}x) = \mathrm{e}^{\varepsilon X}F(x). \tag{2.33}$$

证明

$$F(\mathrm{e}^{\varepsilon X}x) = F(x^*) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}\left(\left.\frac{\mathrm{d}^kF(x^*)}{\mathrm{d}\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0}\right).$$

从 (2.30) 可知 $\dfrac{\mathrm{d}^2F(x^*)}{\mathrm{d}\varepsilon^2} = X^2(x^*)F(x^*)$, 进而有 $\dfrac{\mathrm{d}^kF(x^*)}{\mathrm{d}\varepsilon^k} = X^k(x^*)F(x^*)$. 因此可得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^kF(x^*)}{\mathrm{d}\varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} = X^k(x)F(x)$. 有

$$F(x^*) = F(\mathrm{e}^{\varepsilon X}x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^k(x)\right)F(x) = \mathrm{e}^{\varepsilon X}F(x).$$ □

举个例子, 考虑旋转群

$$x^* = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \tag{2.34a}$$

$$y^* = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon. \tag{2.34b}$$

(2.34a,b) 的无穷小为

$$\xi(x) = (\xi_1(x,y),\ \xi_2(x,y)) = \left(\left.\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},\ \left.\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\right) = (y,\ -x). \tag{2.35}$$

(2.34a,b) 的无穷小生成元为

$$X = \xi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \xi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial y} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.36}$$

相应于 (2.36) 的 Lie 级数可得到

$$(x^*,\ y^*) = (\mathrm{e}^{\varepsilon X}x,\ \mathrm{e}^{\varepsilon X}y),$$

其中

$$Xx = y, \quad X^2x = Xy = -x.$$

因而有

$$X^{4n}x = x, \quad X^{4n-1}x = -y, \quad X^{4n-2}x = -x, \quad X^{4n-3}x = y, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots,$$
$$X^{4n}y = y, \quad X^{4n-1}y = x, \quad X^{4n-2}y = -y, \quad X^{4n-3}y = -x, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots.$$

结果可知

$$\begin{aligned} x^* &= \mathrm{e}^{\varepsilon X}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kx = \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2!} + \frac{\varepsilon^4}{4!} + \cdots\right)x + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{3!} + \frac{\varepsilon^5}{5!} + \cdots\right)y \\ &= x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon. \end{aligned}$$

类似地

$$y^* = \mathrm{e}^{\varepsilon X}y = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon.$$

2.3.4 不变函数

定义 2.3.4.1 无穷次可微函数 $F(x)$ 是 Lie 变换群 (2.6) 的不变函数, 当且仅当对于任意变换群 (2.6),

$$F(x^*) \equiv F(x). \tag{2.37}$$

如果 $F(x)$ 为 (2.6) 的不变函数, 那么 $F(x)$ 称为 (2.6) 的不变量, 且称 $F(x)$ 在 (2.6) 作用下是不变的.

定理 2.3.4.1 $F(x)$ 是 Lie 变换群 (2.6) 作用下不变量, 当且仅当

$$XF(x) \equiv 0. \tag{2.38}$$

证明

$$F(x^*) \equiv \mathrm{e}^{\varepsilon X}F(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^k}{k!}X^kF(x) \equiv F(x) + \varepsilon XF(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^2X^2F(x) + \cdots. \tag{2.39}$$

假设 $F(x*) \equiv F(x)$. 那么由 (2.39) 得 $XF(x) \equiv 0$.

反之, 令 $F(x)$ 满足 $XF(x) \equiv 0$. 那么 $X^n F(x) \equiv 0, n = 1, 2, \cdots$. 因而由 (2.39) 可知 $F(x^*) \equiv F(x)$. □

定理 2.3.4.2　对于 Lie 变换群 (2.6), 恒等式

$$F(x^*) \equiv F(x) + \varepsilon \tag{2.40}$$

成立, 当且仅当 $F(x)$ 满足

$$XF(x) \equiv 1. \tag{2.41}$$

证明　令 $F(x)$ 满足 (2.40). 那么

$$F(x) + \varepsilon \equiv F(x) + \varepsilon XF(x) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 X^2 F(x) + \cdots .$$

因此 $XF(x) \equiv 1$.

反之, 令 $F(x)$ 满足 (2.41), 那么 $X^n F(x) \equiv 0, n = 2, 3, \cdots$. 因而可知

$$F(x^*) \equiv \mathrm{e}^{\varepsilon X} F(x) \equiv F(x) + \varepsilon XF(x) \equiv F(x) + \varepsilon.$$ □

2.3.5　正则坐标

假设作一个坐标变换 (一对一且在某个适当的邻域内是连续可微的)

$$y = Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)). \tag{2.42}$$

对于单参数 Lie 变换群 (2.6), 关于坐标 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的无穷小生成元 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 变为关于由 (2.42) 定义的坐标 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的无穷小生成元

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}, \tag{2.43}$$

那么为了具有同样的群作用, 必须满足 $Y = X$. 关于坐标 y 的无穷小为

$$\eta(y) = (\eta_1(y),\ \eta_2(y),\ \cdots,\ \eta_n(y)) = Yy. \tag{2.44}$$

注意, 利用链式法则得

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j} = Y.$$

因此, 为了满足 $Y = X$, 必须

$$\eta_j(y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial y_j(x)}{\partial x_i} = Xy_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.45}$$

定理 2.3.5.1 关于由 (2.42) 确定的坐标, 单参数 Lie 变换群 (2.6) 变为

$$y^* = \mathrm{e}^{\varepsilon Y} y. \tag{2.46}$$

证明 由 (2.33), (2.42) 可得

$$y^* = Y(x^*) = \mathrm{e}^{\varepsilon X} Y(x) = \mathrm{e}^{\varepsilon X} Y = \mathrm{e}^{\varepsilon Y} y.$$

□

定义 2.3.5.1 坐标 (2.42) 的变换定义了单参数 Lie 变换群 (2.6) 的正则坐标集, 如果群 (2.6) 变为

$$y_i^* = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{2.47a}$$

$$y_n^* = y_n + \varepsilon. \tag{2.47b}$$

定理 2.3.5.2 对于任意单参数 Lie 变换群 (2.6), 存在正则坐标集 $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 使得 (2.6) 等价于 (2.47a,b).

证明 根据定理 2.3.4.1 可知

$$y_i^* = y_i(x^*) = y_i(x)$$

当且仅当

$$X y_i(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1. \tag{2.48}$$

齐次一阶线性 PDE

$$X u(x) = \xi_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \xi_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{2.49}$$

具有 $n-1$ 函数无关的解 $u(x)$. 这些解为 n 个一阶 ODEs

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \xi(x) \tag{2.50}$$

的通解中的 $n-1$ 个基本常数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n-1}(x)$. 该方程组由如下特征方程得到

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\xi_1(x)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\xi_2(x)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\xi_n(x)}.$$

其产生 $n-1$ 个坐标满足 (2.47a). □

由定理 2.3.4.2 可知

$$y_n^* = y_n(x^*) = y_n(x) + \varepsilon$$

当且仅当

$$X y_n(x) \equiv 1. \tag{2.51}$$

因此, $y_n(x)$ 是由一阶非齐次线性 PDE

$$Xv(x) = \xi_1(x)\frac{\partial v}{\partial x_1} + \xi_2(x)\frac{\partial v}{\partial x_2} + \cdots + \xi_n(x)\frac{\partial v}{\partial x_n} = 1 \tag{2.52}$$

的任意特解 $v(x)$ 确定的. 该方程的解可以通过求解相应 $n+1$ 个一阶 ODEs 的特征系统

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 1, \tag{2.53a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \xi(x) \tag{2.53b}$$

的特解来确定.

定理 2.3.5.3　根据任意组正则坐标 $y = (y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_{n-1}(x))$, 单参数 Lie 变换群 (2.6) 的无穷小生成元变为

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_n}. \tag{2.54}$$

证明　有 $Y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y)\dfrac{\partial}{\partial y_i}$. 根据正则坐标, 由 (2.48) 和 (2.51) 得

$$\eta_i(y) = Xy_i = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1,$$
$$\eta_n(y) = Xy_n = 1.$$

因此可推得 (2.54). □

2.3.6　正则坐标集举例

在实平面 $\mathbf{R}^2$ 中, 令 $x_1 = x,\ x_2 = y$, 正则坐标用 $y_1 = r,\ y_2 = s$ 表示, 那么单参数 Lie 变换群变为

$$r^* = r, \tag{2.55a}$$

$$s^* = s + \varepsilon, \tag{2.55b}$$

且无穷小生成元为 $Y = \dfrac{\partial}{\partial s}$.

1. *尺度群*

对于尺度群

$$x^* = \mathrm{e}^{\varepsilon}x, \tag{2.56a}$$

$$y^* = \mathrm{e}^{2\varepsilon}y, \tag{2.56b}$$

无穷小生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial}{\partial y}$. 正则坐标 $r(x,y)$ 满足

$$Xr = x\frac{\partial r}{\partial x} + 2y\frac{\partial r}{\partial y} = 0. \tag{2.57}$$

相应的特征微分方程约化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x} \tag{2.58}$$

且无穷小生成元为

$$r(x,y)=\frac{y}{x^2}=\text{const}. \tag{2.59}$$

正则坐标 $s(x,\ y)$ 满足

$$Xs=x\frac{\partial s}{\partial x}+2y\frac{\partial s}{\partial y}=1. \tag{2.60}$$

(2.60) 的特解 $s(x,y)=s(x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}. \tag{2.61}$$

因此

$$s(x,y)=\log x. \tag{2.62}$$

所以 (2.65a,b) 拥有正则坐标 $(r,\ s)=(y/x^2,\ \log x)$.

2. *旋转群*

对于旋转群

$$x^*=x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon, \tag{2.63a}$$

$$y^*=x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon, \tag{2.63b}$$

无穷小生成元为 $X=x\dfrac{\partial}{\partial y}-y\dfrac{\partial}{\partial x}$. 相应地

$$r(x,y)=\text{const}$$

为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{2.64}$$

的通解. 于是

$$r=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{2.65}$$

那么, $s(x,y)$ 的特解为 $s(x,y)=s(y)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{r^2-y^2}}. \tag{2.66}$$

因此有

$$s=\theta=\arcsin\frac{y}{r}. \tag{2.67}$$

正则坐标为极坐标

$$(r,\ s)=(r,\ \theta)=\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \arcsin\frac{y}{r}\right), \tag{2.68}$$

根据旋转群 (2.63a,b), 可以用通常的形式表示为

$$r^* = r, \tag{2.69a}$$

$$\theta^* = \theta + \varepsilon. \tag{2.69b}$$

习　题　2.3

1. 考虑旋转群

$$x^* = \sqrt{1-\varepsilon^2}x - \varepsilon y, \tag{2.70a}$$

$$y^* = \varepsilon x + \sqrt{1-\varepsilon^2}y. \tag{2.70b}$$

(a) 证明: (2.70a,b) 在 $\varepsilon = 0$ 的邻域内定义了单参数 Lie 变换群. 特别地, 给出结合律 $\phi(a,\ b)$ 和 ε^{-1}.

(b) 确定 $\Gamma(\varepsilon)$ 和 (2.70a,b) 的无穷小生成元.

(c) 积分关于无穷小的初值问题来获得 (2.70a,b).

(d) 根据 $\tau = \int_0^\varepsilon \Gamma(\varepsilon')\,\mathrm{d}\varepsilon'$ 参数化 (2.70a,b).

2. 考虑单参数 (ε) 变换族

$$x^* = x + \varepsilon, \tag{2.71a}$$

$$y^* = \frac{xy}{x+\varepsilon}. \tag{2.71b}$$

(a) 确定 $\Gamma(\varepsilon), \xi(x)$, 并显式地积分关于无穷小的初值问题来获得 (2.70a,b).

(b) 求 (2.70a,b) 的正则坐标.

(c) 根据由 $\xi(x)$ 得到的 Lie 级数确定 (2.71a,b).

3. 对于变换群 (1.93), 寻找无穷小生成元, 显式地积分出关于无穷小的初值问题, 并给出在如下空间上的正则坐标:

(a) $(x,\ t)$ 空间;

(b) (x,t,u) 空间.

4. 寻找对应于如下无穷小生成元:

(a) $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(b) $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(c) $X_3 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$

的单参数变换群和正则坐标.

5. 证明: $X(x)x^* = \xi(x^*)$. 因而可证 $X(x^*) \equiv X(x) \equiv X$.

6. 对于无穷小生成元

$$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}x\right) z\frac{\partial}{\partial z},$$

(a) 给出正则坐标;

(b) 确定相应的单参数 Lie 变换群, 通过

(i) 积分适当的初值问题;

(ii) 根据 Lie 级数发展它.

2.4 点变换和拓展变换 (延拓)

以下各节研究给定微分方程组 S 的单参数点变换 Lie 群.

定义 2.4.1 单参数 (ε) 点变换 Lie 群为具有如下形式的变换群

$$x^* = X(x,\ u;\ \varepsilon), \tag{2.72a}$$

$$u^* = U(x,\ u;\ \varepsilon), \tag{2.72b}$$

且作用在 $n+m$ 变量空间上

$$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n), \tag{2.73}$$

$$u = (u^1,\ u^2,\ \cdots,\ u^m), \tag{2.74}$$

x 代表 n 个自变量, u 表示 m 个因变量.

S 拥有的点变换 Lie 群 (2.72a,b) 将 S 的任意解 $u = \Theta(x)$ 映射为 S 的解 $u = \phi(x;\ \varepsilon)$ 的参数解族. 换句话说, 对 S 的任意解 $u = \Theta(x)$, 在变量变换 (2.72a,b) 作用下, S 的形式是不变的. 在这个意义下, 点变换 Lie 群 (2.72a,b) 使得 S 不变. $\phi(x;\varepsilon)$ 的表达式将在 2.6.2 节中给出推导过程.

令

$$\partial u = \left(\frac{\partial u^1}{\partial x_1}, \frac{\partial u^1}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u^1}{\partial x_n}, \frac{\partial u^2}{\partial x_1}, \frac{\partial u^2}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u^2}{\partial x_n}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial x_1}, \frac{\partial u^m}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u^m}{\partial x_n}\right). \tag{2.75}$$

一般地, 当 $k \geqslant 1$ 时, 令 $\partial^k u$ 表示坐标集

$$u^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \frac{\partial^k u^{\mu}}{\partial x_{i_1}\,\partial x_{i_2}\cdots\,\partial x_{i_k}}, \quad \mu = 1,2,\cdots,m;\ i_j = 1,2,\cdots,n;\ j = 1,2,\cdots,k$$

对应于 u 的所有关于 x 的 k 阶偏导数.

可以证明, 因变量的偏导数的自然变换成功地将作用在 (x, u) 空间上的单参数 Lie 变换群 (2.72a,b) 拓展 (延拓) 到作用在 $(x,\ u, \partial u)$,$(x,\ u, \partial u, \partial^2 u), \cdots, (x,\ u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ (任意 $k > 2$) 空间上单参数 Lie 变换群 (对于给定的微分方程组 S, k 为 S 中最高阶导数的阶次). 那么, (2.72a,b) 的无穷小变换可以自然成功地拓展 (延拓) 到作用在 $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^\ell u)$ 空间 $(\ell = 1, 2, \cdots, k)$ 上的无穷小变换.

下面, 因为标量微分方程的重要性, 我们将分别考虑两种情况：一种情况是一个因变量 (m=1) 和一个自变量 (n=1); 另一种情况为一个因变量 (m=1) 和 n 个自变量. 对于 m 个因变量和 n 个自变量的一般情况重要结果的证明, 留作习题.

介绍拓展的变换的动机是, 根据 S 所拥有的无穷小生成元, 可以将发现给定微分方程组 S 的单参数 Lie 变换群 (2.72a,b) 公式化. 这是一个算法程序.

2.4.1 点变换的拓展群: 单个因变量和单个自变量

具有自变量 x 和因变量 y 的 k 阶 ODE 的不变性质, 目的是寻找如下形式的点变换的单参数 Lie 群

$$x^* = X(x, y; \varepsilon), \tag{2.76a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon), \tag{2.76b}$$

其中 $y = y(x)$.

令

$$y_k = y^{(k)} \doteq \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}, \qquad k \geqslant 1. \tag{2.77}$$

通过要求 (2.76a,b) 保持关于微分 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}y_1, \cdots, \mathrm{d}y_k$:

$$\mathrm{d}y = y_1 \mathrm{d}x \tag{2.78a}$$

和

$$\mathrm{d}y_k = y_{k+1} \mathrm{d}x, \quad k \geqslant 1 \tag{2.78b}$$

的接触条件, 可以将 (2.76a,b) 自然地推广到 $(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(k)})$ 空间 $(k \geqslant 1)$. 特别地, 在变换群 (2.76a,b) 作用下, 变换导数 y_k^*, $k \geqslant 1$ 可以连续地由如下式子确定

$$\mathrm{d}y^* = y_1^* \mathrm{d}x^*, \tag{2.79a}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}y_k^* = y_{k+1}^* \mathrm{d}x^*, \tag{2.79b}$$

其中 x^* 由 (2.76a) 确定, y^* 由 (2.76b) 确定. 那么

$$\mathrm{d}y^* = \mathrm{d}Y(x, y; \varepsilon) = \frac{\partial Y(x, y; \varepsilon)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial Y(x, y; \varepsilon)}{\partial y} \mathrm{d}y, \tag{2.80a}$$

$$dx^* = dX(x,y;\varepsilon) = \frac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial y}dy. \tag{2.80b}$$

于是, 由 (2.79a) 和 (2.80a,b) 可知, y_1^* 满足

$$\frac{\partial Y(x,y;\varepsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial Y(x,y;\varepsilon)}{\partial y}dy = y_1^*\left[\frac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial x}dx + \frac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial y}dy\right]. \tag{2.81}$$

将 (2.78a) 代入 (2.81) 得

$$y_1^* = Y_1(x,y,y_1;\varepsilon) = \frac{\dfrac{\partial Y(x,y;\varepsilon)}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial Y(x,y;\varepsilon)}{\partial y}}{\dfrac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial X(x,y;\varepsilon)}{\partial y}}. \tag{2.82}$$

定理 2.4.1.1 作用在 (x,y) 空间上的点变换的单参数 Lie 群 (2.76a,b) 可以拓展到如下的作用在 $(x,\ y,\ y_1)$ 空间上的点变换的单参数 Lie 群

$$x^* = X(x,y;\varepsilon), \tag{2.83a}$$

$$y^* = Y(x,y;\varepsilon), \tag{2.83b}$$

$$y_1^* = Y_1(x,y,y_1;\varepsilon), \tag{2.83c}$$

其中 $Y_1(x,y,\ y_1;\varepsilon)$ 由 (2.82) 确定.

证明 通过证明 (2.76a,b) 的一阶延拓到 (x,y,y_1) 空间上的封闭性质被保留, 可以完成该定理的证明. 对于其一阶延拓, 单参数 Lie 变换群的其他性质立即满足.

假设 $\phi(\varepsilon,\delta)$ 定义具有参数 ε 和 δ 的结合律. 令

$$(x^{**},\ y^{**}) = (X(x^*,\ y^*;\ \delta),\ Y(x^*,\ y^*;\ \delta)). \tag{2.84}$$

那么, 由群 (2.76a,b) 的封闭性可得

$$(x^{**},y^{**}) = (X(x,\ y;\phi(\varepsilon,\ \delta)),\ Y(x,\ y;\phi(\varepsilon,\ \delta))).$$

但是, y_1^{**} 满足 $dy^{**} = y_1^{**}\,dx^{**}$. 结果有

$$y_1^{**} = Y_1(x,y,y_1;\phi(\varepsilon,\delta)) = \frac{\dfrac{\partial Y(x,y;\phi(\varepsilon,\delta))}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial Y(x,y;\phi(\varepsilon,\delta))}{\partial y}}{\dfrac{\partial X(x,y;\phi(\varepsilon,\delta))}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial X(x,y;\phi(\varepsilon,\delta))}{\partial y}}. \qquad \square$$

定理 2.4.1.2 点变换的单参数 Lie 群 (2.76a,b) 的二阶延拓为如下的作用在 (x,y,y_1,y_2) 空间上的单参数 Lie 变换群

$$x^* = X(x,y;\ \varepsilon), \tag{2.85a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon), \tag{2.85b}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon), \tag{2.85c}$$

$$y_2^* = Y_2(x, y, y_1, y_2; \varepsilon) = \frac{\dfrac{\partial Y_1}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_1}{\partial y} + y_2 \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial X(x, y; \varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x, y; \varepsilon)}{\partial y}}, \tag{2.85d}$$

其中 $Y_1 = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon)$ 由 (2.82) 确定.

定理 2.4.1.2 的证明留作习题 2.4.2.

定理 2.4.1.3　点变换的单参数 Lie 群 (2.76a,b) 的 $k(k \geqslant 2)$ 阶延拓为如下的作用在 $(x, y, y_1, \cdots, y_k)$ 空间上的单参数 Lie 变换群

$$x^* = X(x, y; \varepsilon), \tag{2.86a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon), \tag{2.86b}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon), \tag{2.86c}$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, \cdots, y_k; \varepsilon) = \frac{\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \cdots + y_k \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\dfrac{\partial X(x, y; \varepsilon)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x, y; \varepsilon)}{\partial y}}, \tag{2.86d}$$

其中, $Y_1 = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon)$ 由 (2.82) 定义, $Y_i = Y_i(x, y, y_1, \cdots, y_i; \varepsilon)$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

注意, 我们能够从 (x, y) 空间上的某邻域 D 到 $(x^\dagger, y^\dagger)$ 空间的另一邻域 $D^\dagger$ 来拓展一对一的变换集 (并不必须是变换群)

$$x^\dagger = X(x, y), \tag{2.87a}$$

$$y^\dagger = Y(x, y), \tag{2.87b}$$

其中函数 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 为 D 上的 k 次可微函数. 自然地将 (2.87a,b) 拓展到 $(x, y, y_1, \cdots, y_k)$ 空间, 使得保持接触条件 (2.79a,b) 不变, 即

$$\mathrm{d}y^\dagger = y_1^\dagger \, \mathrm{d}x^\dagger, \tag{2.88a}$$

$$\mathrm{d}y_k^\dagger = \mathrm{d}y_{k+1}^\dagger \, \mathrm{d}x^\dagger, \quad k \geqslant 1. \tag{2.88b}$$

因此, 从 $(x, y, y_1, \cdots, y_k)$ 空间到 $(x^\dagger, y^\dagger, y_1^\dagger, \cdots, y_k^\dagger)$ 空间的 k 阶拓展变换满足

$$x^\dagger = X(x, y), \tag{2.89a}$$

$$y^\dagger = Y(x, y), \tag{2.89b}$$

$$y_1^\dagger = Y_1(x, y, y_1), \tag{2.89c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k^\dagger = Y_k(x, y, y_1, \cdots, y_k) = \frac{\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y} + \cdots + y_k \dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\dfrac{\partial X(x,y)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y}}, \tag{2.89d}$$

其中

$$Y_1 = Y_1(x, y, y_1) = \frac{\dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial Y(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial X(x,y)}{\partial x} + y_1 \dfrac{\partial X(x,y)}{\partial y}},$$

且 $Y_i = Y_i(x, y, y_1, \cdots, y_i),\ \ i = 1, 2, \cdots, k-1.$

现在考虑拓展变换群的例子.

1. 平移群

对于平移群

$$x^* = X = x + \varepsilon, \tag{2.90a}$$

$$y^* = Y = y, \tag{2.90b}$$

知

$$y_1^* = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^* = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} = Y_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1,$$

一般地

$$y_k^* = \left(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}\right)^* = \frac{\mathrm{d}^k y^*}{\mathrm{d}x^{*k}} = Y_k = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} = y_k, \quad k \geqslant 1.$$

因此, 对于平移群 (2.90a,b), k 阶拓展群为

$$x^* = x + \varepsilon, \tag{2.91a}$$

$$y^* = y, \tag{2.91b}$$

$$y_i^* = y_i, \quad i = 1, \cdots, k. \tag{2.91c}$$

2. 尺度群

对于尺度群

$$x^* = X = \mathrm{e}^{\varepsilon} x, \tag{2.92a}$$

$$y^* = Y = \mathrm{e}^{2\varepsilon} y, \tag{2.92b}$$

有

$$y_1^* = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^* = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} = Y_1 = \frac{y_1\dfrac{\partial Y}{\partial y}}{\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \mathrm{e}^{\varepsilon} y_1,$$

一般地

$$y_k^* = \left(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k}\right)^* = \frac{\mathrm{d}^k y^*}{\mathrm{d}x^{*k}} = Y_k = \frac{y_k\dfrac{\partial Y_{k-1}}{\partial y_{k-1}}}{\dfrac{\partial X}{\partial x}} = \mathrm{e}^{(2-k)\varepsilon} y_k, \qquad k \geqslant 1.$$

因此, k 阶拓展群为

$$x^* = \mathrm{e}^{\varepsilon} x, \tag{2.93a}$$

$$y^* = \mathrm{e}^{2\varepsilon} y, \tag{2.93b}$$

$$y_i^* = \mathrm{e}^{(2-i)\varepsilon} y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, k. \tag{2.93c}$$

3. *旋转群*

对于旋转群

$$x^* = X = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \tag{2.94a}$$

$$y^* = Y = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, \tag{2.94b}$$

有

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \cos\varepsilon, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \sin\varepsilon, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\sin\varepsilon, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \cos\varepsilon.$$

因而, 由 (2.83) 可知

$$Y_1 = \frac{-\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon}.$$

从而有

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{\partial Y_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} = \frac{1}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^2}.$$

于是根据 (2.85d) 知

$$Y_2 = \frac{y_2}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^3}.$$

因而

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x} = \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_1} = \frac{-3(\sin\varepsilon)y_2}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^4}, \quad \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} = \frac{1}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^3}.$$

进而由 (2.86d) 可得

$$Y_3 = \frac{(y_1\sin\varepsilon + \cos\varepsilon)y_3 - 3(y_2)^2\sin\varepsilon}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^5}.$$

因此, (2.94a,b) 的三阶拓展的 Lie 变换群为

$$x^* = X = x\cos\varepsilon + y\sin\varepsilon, \tag{2.95a}$$

$$y^* = Y = -x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon, \tag{2.95b}$$

$$y_1^* = \frac{-\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon}, \tag{2.95c}$$

$$y_2^* = \frac{y_2}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^3}, \tag{2.95d}$$

$$y_3^* = \frac{(y_1\sin\varepsilon + \cos\varepsilon)y_3 - 3(y_2)^2\sin\varepsilon}{(\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon)^5}. \tag{2.95e}$$

这是作用在 (x, y, y_1, y_2, y_3) 空间上单参数 Lie 变换群. 当然, 可以连续地拓展 Lie 变换群到 $(x, y, y_1, y_2, y_3, \cdots, y_k)$ 空间 ($k=$ 4,5,$\cdots$), 但是当 k 递增时, 计算会迅速变得越来越复杂.

由 2.3 节可知, 点变换的单参数 Lie 群可由它的无穷小生成元刻画. 因为点变换的单参数 Lie 群的 k 阶拓展也是单参数 Lie 变换群, 因此, 拓展 Lie 变换群的研究简化为研究拓展无穷小变换. 在下面章节中, 根据无穷小变换, 将定理 2.4.1.1~定理 2.4.1.3 公式化, 可得无穷小变换的拓展无穷小变换 (以及相应的无穷小生成元) 的显式算法.

进一步计算之前, 引入下面的记号: 令下标表示关于相应坐标的微分, 如

$$F_x = \partial F/\partial x, \quad F_y = \partial F/\partial y.$$

定义 2.4.1.1 全导数定义为

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_{n+1}\frac{\partial}{\partial y_n} + \cdots. \tag{2.96}$$

对于可微函数 $F(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_\ell)$, 它的全导数为

$$DF(x, y, y_1, y_2, \cdots, y_\ell) = F_x + y_1F_y + y_2F_{y_1} + \cdots + y_{\ell+1}F_{y_\ell}.$$

根据全导数算子 (2.96), 单参数 Lie 点变换群 (2.86a,b) 的 k 阶延拓为

$$x^* = X(x, y; \varepsilon), \tag{2.97a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon), \tag{2.97b}$$

$$y_i^* = Y_i(x, y, y_1, \cdots, y_i; \varepsilon) = \frac{DY_{i-1}(x, y, y_1, \cdots, y_{i-1}; \varepsilon)}{DX(x, y; \varepsilon)}, \quad i = 1, 2, \cdots, k, \tag{2.97c}$$

其中 $Y_0 = Y(x, y; \varepsilon)$.

2.4.2 拓展的无穷小变换: 单个因变量和单个自变量

单参数 Lie 点变换群

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.98a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2) \tag{2.98b}$$

作用在 $(x,\ y)$ 空间上, 具有无穷小

$$\xi(x, y), \quad \eta(x, y), \tag{2.98c}$$

且相应的无穷小生成元为

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.98d}$$

(2.98a,b) 的 k 阶延拓为

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.99a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{2.99b}$$

$$y_1^* = Y_1(x, y, y_1; \varepsilon) = y_1 + \varepsilon\eta^{(1)}(x, y, y_1) + O(\varepsilon^2), \tag{2.99c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k^* = Y_k(x, y, y_1, \cdots, y_k; \varepsilon) = y_k + \varepsilon\eta^{(k)}(x, y, y_1, \cdots, y_k) + O(\varepsilon^2), \tag{2.99d}$$

具有如下的 k 阶延拓的无穷小

$$\xi(x,\ y),\ \eta(x,\ y),\ \eta^{(1)}(x,\ y,\ y_1),\ \cdots,\ \eta^{(k)}(x,\ y,\ y_1,\ \cdots,\ y_k), \tag{2.99e}$$

且相应的 k 阶无穷小生成元

$$\begin{aligned}X^{(k)} = &\ \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,\ y,\ y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \cdots + \eta^{(k)}(x, y, y_1, \cdots, y_k)\frac{\partial}{\partial y_k}, \quad k = 1, 2, \cdots\end{aligned} \tag{2.99f}$$

拓展的无穷小 $\eta^{(k)}$ 的显式公式可由如下定理得到.

定理 2.4.2.1 拓展的无穷小 $\eta^{(k)}$ 满足递推关系

$$\eta^{(k)}(x, y, y_1, \cdots, y_k) = D\eta^{(k-1)}(x, y, y_1, \cdots, y_{k-1}) - y_k D\xi, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{2.100a}$$

其中 $\eta^{(0)}=\eta(x,y)$. 特别地

$$\eta^{(k)}=D^k\eta-\sum_{j=1}^{k}\frac{k!}{(k-j)!\,j!}y_{k-j+1}D^j\xi,\quad k\geqslant 1. \tag{2.100b}$$

证明 利用 (2.96), (2.97c) 和 (2.99a~d) 得

$$\begin{aligned}Y_k(x,y,y_1,\cdots,y_k)&=\frac{DY_{k-1}}{DX}=\frac{D[y_{k-1}+\varepsilon\eta^{(k-1)}+O(\varepsilon^2)]}{D[x+\varepsilon\xi+O(\varepsilon^2)]}=\frac{y_k+\varepsilon D\eta^{(k-1)}}{1+\varepsilon D\xi}+O(\varepsilon^2)\\&=y_k+\varepsilon[D\eta^{(k-1)}-y_kD\xi]+O(\varepsilon^2)=y_k+\varepsilon\eta^{(k)}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

于是可得 (2.100a). 通过有限次归纳到 k, 可得 (2100b). □

由定理 2.4.2.1, 可得 $\eta^{(k)}$ 的显式公式. 特别地

$$\eta^{(1)}=\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y_1-\xi_y(y_1)^2, \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(2)}=&\ \eta_{xx}+(2\eta_{xy}-\xi_{xx})y_1+(\eta_{yy}-2\xi_{xy})(y_1)^2\\&-\xi_{yy}(y_1)^3+(\eta_y-2\xi_x)y_2-3\xi_y y_1y_2,\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}\eta^{(3)}=&\ \eta_{xxx}+(3\eta_{xxy}-\xi_{xxx})y_1+3(\eta_{xyy}-2\xi_{xxy})(y_1)^2\\&+(\eta_{yyy}-3\xi_{xyy})(y_1)^3-\xi_{yyy}(y_1)^4+3(\eta_{xy}-\xi_{xx})y_2\\&+3(\eta_{yy}-3\xi_{xy})y_1y_2-6\xi_{yy}(y_1)^2y_2\\&-3\xi(y_2)^2+(\eta_y-3\xi_x)y_3-4\xi_y y_1y_3.\end{aligned} \tag{2.103}$$

定理 2.4.2.2 拓展的无穷小 $\eta^{(k)}$ 具有下面的性质:

(1) 当 $k\geqslant 2$ 时, $\eta^{(k)}$ 关于 y_k 是线性的.

(2) $\eta^{(k)}$ 是关于 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的多项式, 它的系数关于 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 以及它们的直到 k 阶的偏导数是线性齐次的.

证明留作习题 2.4.5.

现在寻找 2.4.1 节例子中拓展的无穷小 $\eta^{(k)}$.

(1) 平移群 (2.9a,b). 这里

$$\eta^{(k)}=0,\quad k\geqslant 1.$$

(2) 尺度群. 由 (2.93c), 显然

$$\eta^{(k)}=(2-k)y_k,\quad k\geqslant 1\,.$$

(3) 旋转群. 这里 $\xi(x,y)=y$, $\eta(x,y)=-x$. 因而 $\xi_y=1$, $\eta_x=-1$, $\xi_x=\eta_y=0$. 由 (2.101)~(2.103), 知

$$\begin{aligned}\eta^{(1)}&=-[1+(y_1)^2],\\ \eta^{(2)}&=-3y_1y_2,\\ \eta^{(3)}&=-[3(y_2)^2+4y_1y_3],\end{aligned}$$

由 (2.100a), 当 $k\geqslant 4$ 时, 有 $\eta^{(k)}=D\eta^{(k-1)}-y_ky_1$, 因此有

$$\begin{aligned}\eta^{(4)}&=-5[2y_2y_3+y_1y_4],\\ \eta^{(5)}&=-[10(y_3)^2+15y_2y_4+6y_1y_5],\\ &\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

2.4.3　拓展变换: 单个因变量和 n 个自变量

研究含有 n 个自变量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和单个因变量 u 的 PDE 的不变性质自然地导致寻找从 (x,u) 空间到 $(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)$ 空间上的变换的延拓问题, 其中 $\partial^k u$ 表示 u 关于 x 的所有 k 阶偏导数的组合.

首先, 考虑点变换的拓展变换

$$x^\dagger=X(x,u), \tag{2.104a}$$

$$u^\dagger=U(x,u). \tag{2.104b}$$

假设变换 (2.104a,b) 是 (x,u) 空间中某邻域 D 上一对一的, 且函数 $X(x,u),U(x,u)$ 在 D 上是 k 次可微的. 在 $(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)$ 空间的某邻域 D 上, 变换 (2.104a,b) 保持接触条件, 即

$$\mathrm{d}u=\partial u\,\mathrm{d}x, \tag{2.105a}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}\,\partial u^{k-1}=\partial u^k\,\mathrm{d}x, \tag{2.105b}$$

当且仅当在 $(x^\dagger,u^\dagger,\partial u^\dagger,\cdots,\partial^k u^\dagger)$ 空间的某邻域 $D^\dagger$ 上, 有

$$\mathrm{d}u^\dagger=\partial u^\dagger\,\mathrm{d}x^\dagger, \tag{2.106a}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{d}\,\partial^{k-1}u^\dagger=\partial^k u^\dagger\,\mathrm{d}x^\dagger, \tag{2.106b}$$

为了显式地表示接触条件, 令

$$u_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad u_i^\dagger=\frac{\partial u^\dagger}{\partial x_i^\dagger}=\frac{\partial U}{\partial X_i},\cdots.$$

下面假设重复指标表示求和, 条件 (2.105a,b) 由如下方程组确定

$$\mathrm{d}u = u_j\,\mathrm{d}x_j,$$
$$\mathrm{d}u_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}} = u_{i_1 i_2\cdots i_{k-1} j}\mathrm{d}x_j, \quad i_\ell = 1,2,\cdots,n, \ell = 1,2,\cdots,k-1.$$

对于 (2.106a,b) , 类似的表述也成立.

引入全导数算子

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial}{\partial u} + u_{ij}\frac{\partial}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2\cdots i_n}\frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_n}} + \cdots, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.107}$$

对于给定的可微函数 $F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^\ell u)$, 有

$$D_i F(x,u,\partial u,\cdots,\partial^\ell u) = \frac{\partial F}{\partial x_i} + u_i\frac{\partial F}{\partial u} + u_{ij}\frac{\partial F}{\partial u_j} + \cdots + u_{i i_1 i_2\cdots i_\ell}\frac{\partial F}{\partial u_{i_1 i_2\cdots i_\ell}}, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

现在确定拓展的变换

$$u_j^\dagger = U_j(x,u,\partial u), \quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{2.108}$$

利用 (2.104a,b), 可得

$$\mathrm{d}u^\dagger = u_i^\dagger\,\mathrm{d}x_i^\dagger = (D_i U)\,\mathrm{d}x_i,$$
$$\mathrm{d}x_j^\dagger = (D_i X_j)\,\mathrm{d}x_i, \quad j = 1,2,\cdots,n,$$

这里 $D_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 由 (2.107) 确定. 则

$$(D_i X_j) u_j^\dagger = D_i U, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

令 A 为 $n\times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & \cdots & D_1 X_n \\ \vdots & & \vdots \\ D_n X_1 & \cdots & D_n X_n \end{bmatrix}, \tag{2.109}$$

且假设逆 A^{-1} 存在. 则

$$\begin{bmatrix} u_1^\dagger \\ u_2^\dagger \\ \vdots \\ u_n^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} D_1 U \\ D_2 U \\ \vdots \\ D_n U \end{bmatrix}. \tag{2.110}$$

这使得 $(x,u,\partial u)$ 空间上的拓展的变换

$$x^\dagger = X(x,\ u), \tag{2.111a}$$

$$u^\dagger = U(x,\ u), \tag{2.111b}$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x,\ u,\ \partial u). \tag{2.111c}$$

易知, $(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)$ 空间上的拓展的变换为

$$x^\dagger = X(x,\ u), \tag{2.112a}$$

$$u^\dagger = U(x,\ u), \tag{2.112b}$$

$$\partial u^\dagger = \partial U(x,\ u,\ \partial u), \tag{2.112c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial^k u^\dagger = \partial^k U(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u), \tag{2.112d}$$

其中 $\partial^k u^\dagger$ 的分量由如下表达式确定

$$\begin{bmatrix} u^\dagger_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}1} \\ u^\dagger_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ u^\dagger_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}1} \\ U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} D_1 U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}} \\ D_2 U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U_{i_1 i_2\cdots i_{k-1}} \end{bmatrix}, \tag{2.113}$$

$i_\ell = 1,2,\cdots,n(\ell = 1,2,\cdots,k-1;k\geqslant 2)$; $\partial U(x,\ u,\ \partial u)$ 由 (2.110) 确定, 且 A 为矩阵 (2.109).

现在, 考虑特殊情况, (2.104a,b) 定义作用在 $(x,\ u)$ 空间上的 Lie 点变换群

$$x^* = X(x,\ u;\varepsilon), \tag{2.114a}$$

$$u^* = U(x,\ u;\varepsilon), \tag{2.114b}$$

那么容易证明 (根据定理 2.4.1.1~2.4.1.3 的证明), 扩展到 $(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u)$ 空间上的 k 阶延拓

$$x^* = X(x,\ u;\varepsilon), \tag{2.115a}$$

$$u^* = U(x,\ u;\varepsilon), \tag{2.115b}$$

$$\partial u^* = \partial U(x,\ u,\ \partial u;\varepsilon), \tag{2.115c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial^k u^* = \partial^k U(x,\ u,\ \partial u,\ \cdots,\partial^k u;\varepsilon) \tag{2.115d}$$

定义了 k 阶拓展的单参数 Lie 变换群, 其中

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1U \\ D_2U \\ \vdots \\ D_nU \end{bmatrix}, \tag{2.116a}$$

$$\begin{bmatrix} u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1}^* \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2}^* \\ \vdots \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1} \\ U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ D_2U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_nU_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \end{bmatrix}, \tag{2.116b}$$

且 $u_i^* = U_i$ 是 $\partial u^* = \partial U$ 的分量, $u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}i}^* = U_{i_1i_2\cdots i_{k-1}i}$ 是 $\partial^k u^* = \partial^k U$ 的分量. 在 (2.116b) 中, $i_\ell = 1, 2, \cdots, n, \ell = 1, 2, \cdots, k-1; k \geqslant 2$; 算子 D_i 由 (2.107) 确定; A^{-1} 为矩阵 A(2.109) 的逆, X 和 U 由 (2.115a,b) 确定.

2.4.4 拓展的无穷小变换: 单个因变量和 n 个自变量

作用在 (x, u) 空间上的单参数 Lie 点变换群

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.117a}$$

$$u^* = U(x, u; \varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.117b}$$

有无穷小生成元

$$X = \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{2.117c}$$

(2.117a,b) 的 k 阶延拓为

$$x_i^* = X_i(x, u; \varepsilon) = x_i + \varepsilon\xi_i(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.118a}$$

$$u^* = U(x, u; \varepsilon) = u + \varepsilon\eta(x, u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.118b}$$

$$u_i^* = U_i(x, u, \partial u; \varepsilon) = u_i + \varepsilon\eta_i^{(1)}(x, u, \partial u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.118c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{i_1i_2\cdots i_k}^* = U_{i_1i_2\cdots i_k}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u; \varepsilon) = u_{i_1i_2\cdots i_k} + \varepsilon\eta_{i_1i_2\cdots i_k}^{(k)}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.118d}$$

其中 $i = 1, 2, \cdots, n, i_\ell = 1, 2, \cdots, n, \ell = 1, 2, \cdots, k; k \geqslant 1$. 它的 k 阶无穷小为

$$\xi(x, u),\ \eta(x, u),\ \eta^{(1)}(x, u, \partial u),\ \cdots,\ \eta^{(k)}(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u), \tag{2.118e}$$

且相应的 k 阶无穷小生成元为

$$X^{(k)} = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u_i} + \cdots + \eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)} \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_k}}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.118f}$$

由下面的定理可得显式的拓展的无穷小$\eta^{(k)}$ 的表达式.

定理 2.4.4.1 拓展的无穷小满足递推关系

$$\eta_i^{(1)} = D_i \eta - (D_i \xi_j) u_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{2.119a}$$

$$\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{(k)} = D_{i_k} \eta_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}}^{(k-1)} - (D_{i_k} \xi_j) u_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} j}, \tag{2.119b}$$

$$i_\ell = 1, 2, \cdots, n, \quad \ell = 1, 2, \cdots k, \text{且} k \geqslant 2.$$

证明 由 (2.109) 和 (2.118a) 可知

$$A = \begin{bmatrix} D_1(x_1 + \varepsilon\xi_1) & D_1(x_2 + \varepsilon\xi_2) & \cdots & D_1(x_n + \varepsilon\xi_n) \\ D_2(x_1 + \varepsilon\xi_1) & D_2(x_2 + \varepsilon\xi_2) & \cdots & D_2(x_n + \varepsilon\xi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n(x_1 + \varepsilon\xi_1) & D_n(x_2 + \varepsilon\xi_2) & \cdots & D_n(x_n + \varepsilon\xi_n) \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2) = I + \varepsilon B + O(\varepsilon^2),$$

其中 I 为 $n \times n$ 的单位矩阵, 且

$$B = \begin{bmatrix} D_1\xi_1 & D_1\xi_2 & \cdots & D_1\xi_n \\ D_2\xi_1 & D_2\xi_2 & \cdots & D_2\xi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n\xi_1 & D_n\xi_2 & \cdots & D_n\xi_n \end{bmatrix}. \tag{2.120}$$

则

$$A^{-1} = I - \varepsilon B + O(\varepsilon^2). \tag{2.121}$$

由 (2.116a), (2.118b,c), (2.120) 和 (2.121) 可推得

$$\begin{bmatrix} u_1 + \varepsilon\eta_1^{(1)} \\ u_2 + \varepsilon\eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ u_n + \varepsilon\eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = [I - \varepsilon B] \begin{bmatrix} u_1 + \varepsilon D_1\eta \\ u_2 + \varepsilon D_2\eta \\ \vdots \\ u_n + \varepsilon D_n\eta \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

因此

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{(1)} \\ \eta_2^{(1)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta \\ D_2\eta \\ \vdots \\ D_n\eta \end{bmatrix} - B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

导致 (2.119a). 那么, 由 (2116b), (2.118c,d), (2.120) 和 (2.121), 有

$$\begin{bmatrix} u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1}+\varepsilon\eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1} \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2}+\varepsilon\eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n}+\varepsilon\eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = [I-\varepsilon B]\begin{bmatrix} u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1}+\varepsilon D_1\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2}+\varepsilon D_2\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n}+\varepsilon D_n\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \end{bmatrix}+O(\varepsilon^2).$$

因而

$$\begin{bmatrix} \eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1} \\ \eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ \eta^{(k)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ D_2\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n\eta^{(k-1)}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} \end{bmatrix} - B\begin{bmatrix} u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}1} \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}2} \\ \vdots \\ u_{i_1i_2\cdots i_{k-1}n} \end{bmatrix}$$

导致 (2.119b), 其中 $i_\ell=1,2,\cdots,n, \ell=1,2,\cdots,k-l$ 且 $k\geqslant 2$. □

考虑定理 2.4.4.1 的特殊情况. 单个因变量 u 和两个自变量 x_1, x_2，拓展的单参数 Lie 变换群

$$x_i^*=X_i(x_1,\ x_2,\ u;\ \varepsilon)=x_i+\varepsilon\xi_i(x_1,\ x_2,\ u)+O(\varepsilon^2),\quad i=1,2, \tag{2.122a}$$

$$u^*=U(x_1,\ x_2,\ u;\ \varepsilon)=u+\varepsilon\eta(x_1,\ x_2,\ u)+O(\varepsilon^2), \tag{2.122b}$$

$$u_i^*=U_i(x_1,\ x_2,\ u,\ u_1,\ u_2;\ \varepsilon)=u_i+\varepsilon\eta_i^{(1)}(x_1,\ x_2,\ u,\ u_1,\ u_2)+O(\varepsilon^2),\quad i=1,2, \tag{2.122c}$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= U_{ij}(x_1,\ x_2,\ u,\ u_1,\ u_2,\ u_{11},\ u_{12},\ u_{22};\ \varepsilon) \\ &= u_{ij}+\varepsilon\eta_{ij}^{(2)}(x_1,\ x_2,\ u,\ u_1,\ u_2,\ u_{11},\ u_{12},\ u_{22})+O(\varepsilon^2),\quad i,\ j=1,2 \end{aligned} \tag{2.122d}$$

具有如下的无穷小

$$\eta_1^{(1)}=\frac{\partial\eta}{\partial x_1}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right]u_1-\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_2-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}(u_1)^2-\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_1u_2, \tag{2.123}$$

$$\eta_2^{(1)}=\frac{\partial\eta}{\partial x_2}+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\right]u_2-\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}u_1-\frac{\partial\xi_2}{\partial u}(u_2)^2-\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_1u_2, \tag{2.124}$$

$$\begin{aligned} \eta_{11}^{(2)}=&\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1^2}+\left[2\frac{\partial^2\eta}{\partial x_1\,\partial u}-\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1^2}\right]u_1-\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1^2}u_2+\left[\frac{\partial\eta}{\partial u}-2\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\right]u_{11}-2\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}u_{12} \\ &+\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x_1\,\partial u}\right](u_1)^2-2\frac{\partial^2\xi_2}{\partial x_1\,\partial u}u_1u_2-\frac{\partial^2\xi_1}{\partial u^2}(u_1)^3-\frac{\partial^2\xi_2}{\partial u^2}(u_1)^2u_2 \\ &-3\frac{\partial\xi_1}{\partial u}u_1u_{11}-\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_2u_{11}-2\frac{\partial\xi_2}{\partial u}u_1u_{12}, \end{aligned} \tag{2.125}$$

$$\eta_{12}^{(2)} = \eta_{21}^{(2)}$$
$$= \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_2 + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] u_1 - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} u_{22}$$
$$+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{11} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_1 \partial u}(u_2)^2$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_1 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u}\right] u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u}(u_1)^2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2$$
$$- \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u^2}(u_1)^2 u_2 - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{12} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{12} - \frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{11} - \frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_1 u_{22}, \quad (2.126)$$

$$\eta_{22}^{(2)} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2 \partial u} - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2^2}\right] u_2 - \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2^2} u_1 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\right] u_{22} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} u_{12}$$
$$+ \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x_2 \partial u}\right](u_2)^2 - 2\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x_2 \partial u} u_1 u_2 - \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2}(u_2)^3$$
$$- \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u^2} u_1 (u_2)^2 - 3\frac{\partial \xi_2}{\partial u} u_2 u_{22} - 3\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_1 u_{22} - 2\frac{\partial \xi_1}{\partial u} u_2 u_{12}, \quad (2.127)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

2.4.5　拓展的变换与拓展的无穷小变换: m 个因变量和 n 个自变量

在关于 $u = u(x)$ 的微分方程组中, 存在具有 m 个因变量 $u = (u^1, u^2, \cdots, u^m)$ 和 n 个自变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), m \geqslant 2$. 这需要考虑从 (x, u) 空间到 $(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u)$ 空间的拓展的变换, 其中 $\partial^k u$ 表示 u 的关于 x 的所有 k 阶偏导数组合. 这些拓展的变换保持相应的接触条件.

考虑点变换

$$x^\dagger = X(x, u), \quad (2.128a)$$
$$u^\dagger = U(x, u). \quad (2.128b)$$

令

$$u_i^\sigma = \frac{\partial u^\sigma}{\partial x_i}, \quad (u_i^\sigma)^\dagger = \frac{\partial (u^\sigma)^\dagger}{\partial x_i^\dagger} = \frac{\partial U^\sigma}{\partial X_i}, \quad \cdots,$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu} + u_{ij}^\mu \frac{\partial}{\partial u_j^\mu} + \cdots + u_{ii_1 i_2 \cdots i_n}^\mu \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \cdots i_n}^\mu} + \cdots,$$

且重复指标表示求和. (2.128a,b) 的 k 阶拓展的变换为 (习题 2.4.12)

$$x^\dagger = X(x, u), \quad (2.129a)$$

$$u^\dagger = U(x, u), \quad (2.129b)$$

$$\partial u^{\dagger} = \partial U(x,\ u,\ \partial u), \tag{2.129c}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\partial^k u^{\dagger} = \partial^k U(x, u, \partial u, \cdots, \partial^k u), \tag{2.129d}$$

其中 $\partial u^{\dagger}$ 的分量 $(u_i^{\mu})^{\dagger}$ 定义为

$$\begin{bmatrix} (u_1^{\mu})^{\dagger} \\ (u_2^{\mu})^{\dagger} \\ \vdots \\ (u_n^{\mu})^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{\mu} \\ U_2^{\mu} \\ \vdots \\ U_n^{\mu} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U^{\mu} \\ D_2 U^{\mu} \\ \vdots \\ D_n U^{\mu} \end{bmatrix}, \tag{2.130}$$

A^{-1} 为如下矩阵的逆 (假设存在)

$$A = \begin{bmatrix} D_1 X_1 & D_1 X_2 & \cdots & D_1 X_n \\ D_2 X_1 & D_2 X_2 & \cdots & D_2 X_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_n X_1 & D_n X_2 & \cdots & D_n X_n \end{bmatrix}, \tag{2.131}$$

且 $\partial^k u^{\dagger}$a 的分量 $(u^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_k})^{\dagger}$ 表示为

$$\begin{bmatrix} (u^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1})^{\dagger} \\ (u^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2})^{\dagger} \\ \vdots \\ (u^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n})^{\dagger} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 1} \\ U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} 2} \\ \vdots \\ U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1} n} \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} D_1 U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ D_2 U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \\ \vdots \\ D_n U^{\mu}_{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \cdots, n. \tag{2.132}$$

现在, 考虑点变换 (2.128a,b) 为单参数 Lie 点变换群的特殊情况

$$X^* = X(x, u; \varepsilon), \tag{2.133a}$$

$$U^* = U(x, u; \varepsilon), \tag{2.133b}$$

这里用 * 代替 †, (2.129)~(2.132) 的 k 阶拓展变换为作用在 $(x,\ u,\ \partial u,\ \cdots,\ \partial^k u)$ 空间上的单参数 Lie 变换群. 则有

$$x_i^* = X_i(x,\ u;\ \varepsilon) = x_i + \varepsilon \xi_i(x,\ u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.134a}$$

$$(u^{\mu})^* = U^{\mu}(x,\ u;\ \varepsilon) = u^{\mu} + \varepsilon \eta^{\mu}(x,\ u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.134b}$$

$$(u_i^{\mu})^* = U_i^{\mu}(x,\ u,\ \partial u;\ \varepsilon) = u_i^{\mu} + \varepsilon \eta_i^{(1)\mu}(x,\ u,\ \partial u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.134c}$$

$$\cdots\cdots$$

$$(u^\mu_{i_1i_2\cdots i_k})^* = U^\mu_{i_1i_2\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u;\varepsilon) = u^\mu_{i_1i_2\cdots i_k} + \varepsilon\eta^{(k)\mu}_{i_1i_2\cdots i_k}(x,u,\partial u,\cdots,\partial^k u) + O(\varepsilon^2), \tag{2.134d}$$

其中拓展的无穷小 $\eta^{(k)\mu}_{i_1i_2\cdots i_k}$ 为

$$\eta^{(1)\mu}_i = D_i\eta^\mu - (D_i\xi_j)u^\mu_j, \tag{2.135}$$

$$\eta^{(k)\mu}_{i_1i_2\cdots i_k} = D_{i_k}\eta^{(k-1)\mu}_{i_1i_2\cdots i_{k-1}} - (D_{i_k}\xi_j)u^\mu_{i_1i_2\cdots i_{k-1}j}, \tag{2.136}$$

$i_\ell = 1,2,\cdots,n, \ell = 1,2,\cdots,k$ 且 $k \geqslant 2$. k 阶拓展的无穷小生成元为

$$X^{(k)} = \xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^\mu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\mu} + \eta^{(1)\mu}_i(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u^\mu_i}$$

$$\cdots\cdots$$

$$+\eta^{(k)\mu}_{i_1i_2\cdots i_k}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u^\mu_{i_1i_2\cdots i_k}}, \quad k \geqslant 1. \tag{2.137}$$

习　题　2.4

1. 定理 2.4.1.3 中, 证明: 由 (2.86d) 定义的 Y_k, $k \geqslant 2$,

(i) 关于 y_k 是线性的;

(ii) 是 $y_2, y_3, \cdots, y_k$ 的一个多项式, 且系数是 $(x,\ y, y_1)$ 的函数.

2. 证明定理 2.4.1.2.

3. 对于旋转群 (2.94a,b), 确定 $y_4^* = Y_4$,

(a) 利用定理 2.4.1.3;

(b) 从它的拓展的无穷小, 即定理 2.4.2.1.

4. (a) 推导 (2.101)~(2.103);

(b) 确定$\eta^{(4)}$.

5. 证明定理 2.4.2.2.

6. 对于群

$$x^* = x + \varepsilon, \quad y^* = \frac{xy}{x+\varepsilon}, \quad y = y(x),$$

确定

(a) $\xi, \eta, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \eta^{(3)}$;

(b) $y_1^* = Y_1, y^* = Y_2, y_3^* = Y_3$.

7. 对于旋转群 (2.94a,b), 求它的一阶和二阶延拓的不变量, 并从几何角度解释.

8. 解释保持接触条件 (2.78a,b) 的几何意义.

9. 证明: 由 (2.115a,b), (2.116a,b) 定义的 $\partial^k U(k \geqslant 2)$ 的每个分量:

(a) 关于 $\partial^k u$ 的分量是线性的;

(b) 是 $\partial^2 u, \partial^3 u, \cdots, \partial^{k-1} u$ 的一个多项式, 且系数是 $x, u, \partial u$ 的函数.

10. 陈述并证明定理 2.4.2.2 对于由定理 2.4.4.1 确定的拓展无穷小 $\eta_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 的结论.

11. 推导 (2.123)~(2.127).

12. 推导 (2.129a~d), (2.130)~(2.132).

13. 推导 (2.135), (2.136).

14. 对于下面两个例子 (源于热方程的群性质研究), 包含两个自变量 (x, t) 和一个因变量 $u = u(x, t)$, 确定 (i) 拓展的无穷小生成元 $X^{(1)}$, $X^{(2)}$; (ii) 拓展的单参数 Lie 变换群, 且作用在 $(x, u, \partial u)$ 空间和 $(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ 空间上, 它的无穷小生成元为

(a) $X = 2t\dfrac{\partial}{\partial x} - xu\dfrac{\partial}{\partial u}$;

(b) $X = 4xt\dfrac{\partial}{\partial x} + 4t^2\dfrac{\partial}{\partial t} - (x^2 + 2t)u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

15. 考虑单个自变量 x 和单个因变量 $y = y(x)$ 的情况. 假设点变换

$$x^\dagger = X(x, y), \tag{2.138a}$$

$$y^\dagger = Y(x, y) \tag{2.138b}$$

保持接触条件及可以相互转化的, 使得

$$x = X^\dagger(x^\dagger, y^\dagger),$$
$$y = Y^\dagger(x^\dagger, y^\dagger),$$

其中 $X^\dagger$, $Y^\dagger$ 是 $x^\dagger$, $y^\dagger$ 的已知的显式函数. 将 y_1 和 y_2 表示为 $x^\dagger, y^\dagger, y_1^\dagger, y_2^\dagger$ 的函数. 证明: 当 (2.138a,b) 为单参数 Lie 点变换群时, 这是如何简化的. 展示旋转群 (2.94a,b).

16. 考虑两个自变量 (x, t) 和单个因变量 $u = u(x,t)$ 的情况. 假设点变换

$$x^\dagger = X(x, t, u), \tag{2.139a}$$

$$t^\dagger = T(x, t, u), \tag{2.139b}$$

$$u^\dagger = U(x, t, u) \tag{2.139c}$$

保持接触条件及可以相互转化, 使得

$$x = X^\dagger(x^\dagger, t^\dagger, u^\dagger),$$

$$t = T^\dagger(x^\dagger, t^\dagger, u^\dagger),$$

$$u = U^\dagger(x^\dagger, t^\dagger, u^\dagger),$$

其中 $X^\dagger, T^\dagger, U^\dagger$ 是 $x^\dagger, t^\dagger, u^\dagger$ 的已知的显式函数. 将 ∂u 和 $\partial^2 u$ 的分量表示为 $x^\dagger, t^\dagger, u^\dagger$ 以及 $\partial u^\dagger$ 和 $\partial^2 u^\dagger$ 的分量的函数. 证明：当 (2.139a~c) 为单参数 Lie 点变换群时, 这是如何简化的. 展示单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元 $X = 2t\dfrac{\partial}{\partial x} - xu\dfrac{\partial}{\partial u}$.

17. 对于由 (2.104a) ((2.109a)) 定义的 $X(x, u)$, 给出准则使得相应的由 (2.109) ((2.131)) 定义的矩阵 A 存在一个逆.

2.5　多参数 Lie 变换群和 Lie 代数

目前, 本章仅仅考虑了单参数 Lie 变换群. 第 1 章关于量纲分析遇到了多参数尺度族作用下的不变性. 这些是多参数 Lie 点变换群的例子. 本节总结一些适合于多参数 Lie 变换群的关键结论. 假设具有有限数目的参数.

r 参数 Lie 变换群中的每个参数导致无穷小生成元. 无穷小生成元属于 r 维向量空间, 在这个空间上存在额外的结构, 称为换位子. 这个特殊的向量空间称为 Lie 代数 (r 维 Lie 代数).

研究 r 参数 Lie 变换群等价于研究它的无穷小生成元和相应的 Lie 代数结构. 任一无穷小生成元的指数是单参数 Lie 变换群, 它是 r 参数 Lie 变换群的子群. 最重要的, 给定微分方程的多参数 Lie 变换群, 仅仅需要考虑单参数 Lie 变换群下微分方程的不变性.

在多参数 Lie 变换群作用下, 可解 Lie 代数 (特殊的 Lie 代数) 在研究至少三阶的 ODEs 的不变性问题中具有重要的作用.

关于这部分的进一步的详细资料, 可参考文献 (Cohn, 1965; Eisenhart, 1933; Gilmore, 1974; Ovsiannikov, 1962,1982).

2.5.1　r 参数 Lie 变换群

考虑 r 参数 Lie 点变换群

$$x^* = X(x; \varepsilon), \tag{2.140}$$

且 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 参数为 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r)$. 令参数的结合律

$$\phi(\varepsilon, \delta) = (\phi_1(\varepsilon, \delta), \phi_2(\varepsilon, \delta), \cdots, \phi_r(\varepsilon, \delta)),$$

且 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$, 其中 $\phi(\varepsilon, \delta)$ 满足在 $\varepsilon = 0(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_r = 0)$ 时的群公理, 以及假设 $\phi(\varepsilon, \delta)$ 在定义的邻域内是解析的.

令无穷小矩阵 $\Xi(x)$ 为 $r\times n$ 矩阵

$$\xi_{\alpha j}(x)=\left.\frac{\partial x_j^*}{\partial\varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0}=\left.\frac{\partial X_j(x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon_\alpha}\right|_{\varepsilon=0},\quad \alpha=1,2,\cdots,r,\ \ j=1,2,\cdots,n. \tag{2.141}$$

令 $\Theta(\varepsilon)$ 为 $r\times r$ 矩阵

$$\Theta_{\alpha\beta}(\varepsilon)=\left.\frac{\partial\phi_\beta(\varepsilon,\delta)}{\partial\delta_\alpha}\right|_{\delta=0}, \tag{2.142}$$

且矩阵 $\Theta(\varepsilon)$ 的逆表示为

$$\Psi(\varepsilon)=\Theta^{-1}(\varepsilon). \tag{2.143}$$

那么, r 参数 Lie 变换群情况下的 Lie 第一基本定理表述为: 在 ε=0 的某个邻域内, (2.140) 等价于 nr 个一阶偏微分方程组初值问题的解

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x_1^*}{\partial\varepsilon_1} & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial\varepsilon_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial\varepsilon_1}\\ \dfrac{\partial x_1^*}{\partial\varepsilon_2} & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial\varepsilon_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial\varepsilon_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1^*}{\partial\varepsilon_r} & \dfrac{\partial x_2^*}{\partial\varepsilon_r} & \cdots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial\varepsilon_r}\end{bmatrix}=\Psi(\varepsilon)\Xi(x^*), \tag{2.144a}$$

且

$$x^*=x,\quad 当\varepsilon=0时. \tag{2.144b}$$

定义 2.5.1.1 相应于 r 参数 Lie 变换群 (2.140) 的参数 ε_α 的无穷小生成元 X_α 为

$$X_\alpha=\sum_{j=1}^n\xi_{\alpha j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\quad \alpha=1,2,\cdots,r. \tag{2.145}$$

可以证明 r 参数 Lie 变换群 (2.140) 等价于

$$x^*=\prod\nolimits_{\alpha=1}^{r}\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha}x=\mathrm{e}^{\mu_1X_1}\mathrm{e}^{\mu_2X_2}\cdots\mathrm{e}^{\mu_rX_r}x,$$
$$x^*=\prod\nolimits_{\alpha=1}^{r}\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha}x=\mathrm{e}^{\mu_1X_1}\mathrm{e}^{\mu_2X_2}\cdots\mathrm{e}^{\mu_rX_r}x, \tag{2.146}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 为任意实常数. (2.146) 中算子的阶可以通过重新编排无穷小生成元来重新排列, 即使它并不是必须正确的, $\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha}\mathrm{e}^{\mu_\beta X_\beta}=\mathrm{e}^{\mu_\beta X_\beta}\mathrm{e}^{\mu_\alpha X_\alpha}(\alpha\neq\beta)$. 不同的排序对应于不同的参数化, 即 $\Psi(\varepsilon)$ 要改变. r 参数 Lie 变换群等价于 (2.140), 如果它可以由 (2.144a,b) 表达, 且具有同样的 $\Xi(x)$

可证单参数 Lie 变换群

$$x^*=\mathrm{e}^{\varepsilon X}x=\mathrm{e}^{\varepsilon\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\sigma_\alpha X_\alpha}x \tag{2.147}$$

是由无穷小生成元

$$X=\sum_{\alpha=1}^{r}\sigma_\alpha X_\alpha=\sum_{j=1}^{n}\varsigma_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{2.148}$$

的指数获得, 其中

$$\varsigma_j(x)=\sum_{\alpha=1}^{r}\sigma_\alpha\xi_{\alpha j}(x),\quad j=1,2,\cdots,n, \tag{2.149}$$

对于任意固定的实常数 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r$, 它定义 r 参数 Lie 变换群 (2.140) 的单参数 (ε) 子群.

作为例子, 考虑如下的两参数 $(\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2))$Lie 变换群 $((x_1,\ x_2)=(x,\ y))$

$$x^*=\mathrm{e}^{\varepsilon_1}x+\varepsilon_2, \tag{2.150a}$$

$$y^*=\mathrm{e}^{2\varepsilon_1}y. \tag{2.150b}$$

那么

$$\begin{aligned}x^{**}&=\mathrm{e}^{\delta_1}x^*+\delta_2=\mathrm{e}^{\phi_1(\varepsilon,\delta)}x+\phi_2(\varepsilon,\delta),\\ y^{**}&=\mathrm{e}^{2\delta_1}y^*=\mathrm{e}^{2\phi_1(\varepsilon,\delta)}y,\end{aligned}$$

且结合律为

$$\phi(\varepsilon,\delta)=(\phi_1(\varepsilon,\delta),\phi_2(\varepsilon,\delta))=(\varepsilon_1+\delta_1,\mathrm{e}^{\delta_1}\varepsilon_2+\delta_2). \tag{2.151}$$

很容易验证, 当 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=0$ 时, 具有结合律 (2.151) 的两参数变换族 (2.150a,b) 定义了两参数 Lie 变换群, 且 $x^*=x$, $y^*=y$.

现在验证 (2.144a,b) 成立:

$$\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_1}=\mathrm{e}^{\varepsilon_1}x=x^*-\varepsilon_2,\quad \frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_1}=2\mathrm{e}^{2\varepsilon_1}y=2y^*,\quad \frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_2}=1,\quad \frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_2}=0.$$

因而

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_1} & \dfrac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_1}\\ \dfrac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_2} & \dfrac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^*-\varepsilon_2 & 2y^*\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{2.152}$$

那么

$$\begin{aligned}\xi_{11}(x)&=\left.\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon=0}=x,\quad \xi_{12}(x)=\left.\frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon=0}=2y,\\ \xi_{21}(x)&=\left.\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_2}\right|_{\varepsilon=0}=1,\quad \xi_{22}(x)=\left.\frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_2}\right|_{\varepsilon=0}=0.\end{aligned}$$

因此, 无穷小矩阵为

$$\Xi(x)=\begin{bmatrix}x & 2y\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{2.153}$$

为了确定 $\Psi(\varepsilon)$, 有

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\delta_1}=1,\quad \frac{\partial\phi_2}{\partial\delta_1}=\mathrm{e}^{\delta_1}\varepsilon_2,\quad \frac{\partial\phi_1}{\partial\delta_2}=0,\quad \frac{\partial\phi_2}{\partial\delta_2}=1,$$

所以

$$\Theta_{11}=\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial\delta_1}\right|_{\delta=0}=1,\quad \Theta_{12}=\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial\delta_1}\right|_{\delta=0}=\varepsilon_2,\quad \Theta_{21}=\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial\delta_2}\right|_{\delta=0}=0,\quad \Theta_{22}=\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial\delta_2}\right|_{\delta=0}=1.$$

因此，可得

$$\Theta(\varepsilon)=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{2.154}$$

$$\Psi(\varepsilon)=\Theta^{-1}(\varepsilon)=\begin{bmatrix}1 & -\varepsilon_2\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{2.155}$$

易知

$$\Psi(\varepsilon)\Xi(x^*)=\begin{bmatrix}x^*-\varepsilon_2 & 2y^*\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

即矩阵 (2.152), 这就证明了 (2.144a,b). 其他留作习题 2.5.1, 求解偏微分方程组

$$\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_1}=x^*-\varepsilon_2, \tag{2.156a}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_1}=2y^*, \tag{2.156b}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial\varepsilon_2}=1, \tag{2.156c}$$

$$\frac{\partial y^*}{\partial\varepsilon_2}=0 \tag{2.156d}$$

的初值问题, 且

$$x^*=x,\quad y^*=y,\quad 当\varepsilon_1=0,\varepsilon_2=0时. \tag{2.156e}$$

这包含了 (2.150a,b).

对于两参数 Lie 变换群 (2.150a,b), 相应的无穷小生成元为

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+2y\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.157a}$$

$$X_2=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.157b}$$

对任意可微函数 $F(x,y)$, 有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon X_1}F(x,y)=F(\mathrm{e}^{\varepsilon}x,\mathrm{e}^{2\varepsilon}y), \tag{2.158a}$$

$$e^{\varepsilon X_2}F(x,y)=F(x+\varepsilon,y). \tag{2.158b}$$

现在验证表达式 (2.146) 和 (2.147) 导致 (2.150a,b).

从 (2.158a,b) 可知, 对任意实常数 μ_1,μ_2, 有

$$e^{\mu_1X_1}e^{\mu_2X_2}(x,y)=e^{\mu_1X_1}(x+\mu_2,y)=(e^{\mu_1}x+\mu_2,e^{2\mu_1}y), \tag{2.159}$$

$$e^{\mu_2X_2}e^{\mu_1X_1}(x,y)=e^{\mu_2X_2}(e^{\mu_1}x,e^{2\mu_1}y)=(e^{\mu_1}(x+\mu_2),e^{2\mu_1}y). \tag{2.160}$$

令 $\tilde{x}=\lambda_1x+\lambda_2$. 则

$$\begin{aligned}e^{\varepsilon(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)}(x,y)&=e^{\varepsilon\lambda_1\tilde{x}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}+2\varepsilon\lambda_1y\frac{\partial}{\partial y}}\left(\frac{\tilde{x}-\lambda_2}{\lambda_1},y\right)=\left(\frac{e^{\varepsilon\lambda_1}\tilde{x}-\lambda_2}{\lambda_1},e^{2\varepsilon\lambda_1}y\right)\\&=\left(e^{\varepsilon\lambda_1}x+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(e^{\varepsilon\lambda_1}-1\right),e^{2\varepsilon\lambda_1}y\right).\end{aligned} \tag{2.161}$$

因此, (2.159) 与 (2.150a,b) 是一致的, 且具有同样的结合律; (2.160) 等价于 (2.150a,b), 且结合律为 $\phi(\varepsilon,\delta)=(\varepsilon_1+\delta_1,\varepsilon_2+e^{-\delta_1}\delta_2)$, 以及 (2.161) 等价于 (2.150a,b), 且结合律为

$$\phi(\varepsilon,\delta)=\left(\varepsilon_1+\delta_1,\frac{\varepsilon_1+\delta_1}{e^{\varepsilon_1+\delta_1}-1}\left(e^{\delta_1}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}(e^{\varepsilon_1}-1)+\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)-\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\right).$$

2.5.2 Lie 代数

定义 2.5.2.1 考虑 r 参数 Lie 变换群 (2.140), 它的无穷小生成元 X_α, $\alpha=1,2,\cdots,r$ 由 (2.141) 和 (2.145) 确定. X_α 和 X_β 的换位子 (Lie 括号) 是一阶算子

$$\begin{aligned}[X_\alpha,X_\beta]=X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha=\sum_{i,j=1}^{n}\Bigg[&\left(\xi_{\alpha i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\xi_{\beta j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\\&-\left(\xi_{\beta i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(\xi_{\alpha j}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\Bigg]=\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\end{aligned} \tag{2.162a}$$

其中

$$\eta_j(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_{\alpha i}(x)\frac{\partial\xi_{\beta j}(x)}{\partial x_i}-\xi_{\beta i}(x)\frac{\partial\xi_{\alpha j}(x)}{\partial x_i}\right). \tag{2.162b}$$

因此立即可得

$$[X_\alpha,X_\beta]=-[X_\beta,X_\alpha]. \tag{2.163}$$

定理 2.5.2.1(Lie 第二基本定理) r 参数 Lie 变换群的任意两个无穷小生成元的换位子也是无穷小生成元. 特别地,

$$[X_\alpha,X_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{r}C_{\alpha\beta}^{\gamma}X_\gamma, \tag{2.164}$$

其中系数 $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ 称为结构常数,$\alpha,\beta,\gamma=1,2,\cdots,r$.

证明 该定理的证明基本依靠将积分条件

$$\frac{\partial^2 x_i^*}{\partial\varepsilon_\alpha\,\partial\varepsilon_\beta}=\frac{\partial^2 x_i^*}{\partial\varepsilon_\beta\,\partial\varepsilon_\alpha},\quad i=1,2,\cdots,n,\quad \alpha,\beta=1,2,\cdots,r \tag{2.165}$$

作用于 (2.144a). 关于详细的证明, 可参看前面提到的文献. □

定义 2.5.5.2 方程 (2.164a) 称为具有无穷小生成元 (2.145) 的 r 参数 Lie 变换群 (2.140) 的转换关系.

对于任意三个无穷小生成元 X_α, X_β, X_γ, 通过直接计算, 可证明 Jacobi 恒等式成立:

$$[X_\alpha,[X_\beta,X_\gamma]]+[X_\beta,[X_\gamma,X_\alpha]]+[X_\gamma,[X_\alpha,X_\beta]]=0. \tag{2.166}$$

由 (2.163), (2.164) 和 (2.166), 下面关于结构常数的定理很容易证明.

定理 2.5.2.2(Lie 第三基本定理) 由转换关系 (2.164) 定义的结构常数满足关系式

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}=-C_{\beta\alpha}^{\gamma}, \tag{2.167a}$$

$$\sum_{\rho=1}^{r}[C_{\alpha\beta}^{\rho}C_{\rho\gamma}^{\delta}+C_{\beta\gamma}^{\rho}C_{\rho\alpha}^{\delta}+C_{\gamma\alpha}^{\rho}C_{\rho\beta}^{\delta}]=0. \tag{2.167b}$$

特别地, (2.167a) 等价于换位子的反对称性质 (2.163), (2.167b) 等价于 Jacobi 恒等式 (2.166).

定义 2.5.2.3 Lie 代数 L 为 **R** 或 **C** 上的向量空间, 且具有满足性质 (2.163), (2.166) 和最重要的性质 (2.164) 的双线性括号运算 (换位子). 特别地, r 参数 Lie 变换群的无穷小生成元$\{X_\alpha\}$, $\alpha=1,2,\cdots,r$ 构成一个 **R** 上的 r 维的 Lie 代数.

通过下面的论据, 能够理解换位子 $[X_\alpha,\ X_\beta]$ 的定义.

令 G^r 表示 r 参数 Lie 变换群 (2.140). G^r 的任意单参数 (ε)Lie 变换群在 L^r 上具有相应的无穷小生成元. 例如, $X_\alpha\in L^r$ 对应于 $\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}x\in G^r$, $\alpha=1,2,\cdots,r$; $aX_\alpha+bX_\beta\in L^r$ 对应于 $\mathrm{e}^{\varepsilon(aX_\alpha+bX_\beta)}x\in G^r$, $\mathrm{e}^{\varepsilon aX_\alpha}\mathrm{e}^{\varepsilon bX_\beta}x\in G^r$. 如果 $X_\alpha,X_\beta\in L^r$, 那么, 对任意实数 ε, $\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}x$ 和 $\mathrm{e}^{\varepsilon X_\beta}x$ 属于 G^r. 考虑单参数 (ε) 变换的换位子群

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{-\varepsilon X_\beta}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\beta}x=[\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}]^{-1}[\mathrm{e}^{\varepsilon X_\beta}]^{-1}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\beta}x\in G^r.$$

则

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{-\varepsilon X_\beta}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\beta} &= \left(1-\varepsilon X_\alpha+\frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\alpha)^2\right)\left(1-\varepsilon X_\beta+\frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\beta)^2\right)\\
&\quad\times\left(1+\varepsilon X_\alpha+\frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\alpha)^2\right)\left(1+\varepsilon X_\beta+\frac{1}{2}\varepsilon^2(X_\beta)^2\right)+O(\varepsilon^3)\\
&=(1-\varepsilon(X_\alpha+X_\beta)+\varepsilon^2\left(X_\alpha X_\beta+\frac{1}{2}(X_\alpha)^2+\frac{1}{2}(X_\beta)^2\right)\\
&\quad\times(1+\varepsilon(X_\alpha+X_\beta)+\varepsilon^2\left(X_\alpha X_\beta+\frac{1}{2}(X_\alpha)^2+\frac{1}{2}(X_\beta)^2\right)+O(\varepsilon^3)\\
&=1+\varepsilon^2\left(2X_\alpha X_\beta+(X_\alpha)^2+(X_\beta)^2-(X_\alpha+X_\beta)^2\right)+O(\varepsilon^3)\\
&=1+\varepsilon^2(X_\alpha X_\beta-X_\beta X_\alpha)+O(\varepsilon^3)\\
&=1+\varepsilon^2[X_\alpha,X_\beta]+O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

因此, $[X_\alpha,\ X_\beta]\in L^r$.

可以证明, $\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}\mathrm{e}^{\delta X_\beta}=\mathrm{e}^{\delta X_\beta}\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha}=\mathrm{e}^{\varepsilon X_\alpha+\delta X_\beta}$ 当且仅当 $[X_\alpha,X_\beta]=0$(习题 2.5.10).

定理 2.5.2.3 令 $X_\alpha^{(k)}$, $X_\beta^{(k)}$ 为无穷小生成元 X_α,X_β 的 k 阶延拓的无穷小生成元, $[X_\alpha,X_\beta]^{(k)}$ 为换位子 $[X_\alpha,X_\beta]$ 的 k 阶延拓的无穷小生成元. 那么, $[X_\alpha,X_\beta]^{(k)}=[X_\alpha^{(k)},X_\beta^{(k)}],k\geqslant 1$. 因此, 如果 $[X_\alpha,X_\beta]=X_\gamma$, 那么 $[X_\alpha^{(k)},\ X_\beta^{(k)}]=X_\gamma^{(k)},k\geqslant 1$.

证明留作习题 2.5.2.4(Ovsiannikov, 1962, 1982; Olver, 1986).

定义 2.5.2.4 子空间 $J\subset L$ 称为 Lie 代数 L 的子代数, 如果对所有 X_α, $X_\beta\in J$, 有 $[X_\alpha,\ X_\beta]\in J$.

2.5.3 Lie 代数举例

1. R^2 上的 8 参数 Lie 射影变换群

$\mathbf{R}^2$ 上的射影变换将直线映成直线. 特别地, 它们由 8 参数 Lie 变换群确定

$$x^*=\frac{(1+\varepsilon_3)x+\varepsilon_4 y+\varepsilon_5}{\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+1},\tag{2.168a}$$

$$y^*=\frac{\varepsilon_6 x+(1+\varepsilon_7)y+\varepsilon_8}{\varepsilon_1 x+\varepsilon_2 y+1},\tag{2.168b}$$

且参数 $\varepsilon_\ell\in R,\ell=1,2,\cdots,8$. 相应 Lie 代数 L^8 的无穷小生成元为

$$\begin{aligned}
&X_1=x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=x\frac{\partial}{\partial x},\quad X_4=y\frac{\partial}{\partial x},\\
&X_5=\frac{\partial}{\partial x},\qquad X_6=x\frac{\partial}{\partial y},\qquad X_7=y\frac{\partial}{\partial y},\quad X_8=\frac{\partial}{\partial y}.
\end{aligned}\tag{2.169}$$

通过换位子表, 很方便展示 Lie 代数的换位子, 它的 (i, j) 个表值为 $[X_i, X_j]$. 由 (2.163) 可知, 该表是反对称的且对角线元素全为零. 从换位子表, 很容易得到结构常数.

对于无穷小生成元 (2.169), 我们获得下面的换位子表:

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	$-X_1$	$-X_2$
X_2	0	0	0	0
X_3	X_1	0	0	$-X_4$
X_4	X_2	0	X_4	0
X_5	$2X_3+X_7$	X_4	X_5	0
X_6	0	X_1	$-X_6$	X_3-X_7
X_7	0	X_2	0	X_4
X_8	X_6	X_3+2X_7	0	X_5

	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	$-2X_3-X_7$	0	0	$-X_6$
X_2	$-X_4$	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3-2X_7$
X_3	$-X_5$	X_6	0	0
X_4	0	X_7-X_3	$-X_4$	$-X_5$
X_5	0	X_8	0	0
X_6	$-X_8$	0	X_6	0
X_7	0	$-X_6$	0	$-X_8$
X_8	0	0	X_8	0

2. $\mathbf{R}^2$ 上的刚体运动群

$\mathbf{R}^2$ 上的刚体运动群保持 $\mathbf{R}^2$ 上任意两点之间的距离不变. 这个群为 $\mathbf{R}^2$ 上的 3 参数 Lie 旋转和平移变换群

$$x^* = x\cos\varepsilon_1 - y\sin\varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{2.170a}$$

$$y^* = x\sin\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_1 + \varepsilon_3, \tag{2.170b}$$

相应的无穷小生成元为

$$X_1 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.171}$$

它的 Lie 代数的换位子表为

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	$-X_3$	X_2
X_2	X_3	0	0
X_3	$-X_2$	0	0

3. $\mathbf{R}^2$ 上的相似群

$\mathbf{R}^2$ 上的相似群由 $\mathbf{R}^2$ 上的一致尺度和刚体运动构成. 它是 4 参数 Lie 变换群

$$x^* = \mathrm{e}^{\varepsilon_4}(x\cos\varepsilon_1 - y\sin\varepsilon_1) + \varepsilon_2, \tag{2.172a}$$

$$y^* = \mathrm{e}^{\varepsilon_4}(x\sin\varepsilon_1 + y\cos\varepsilon_1) + \varepsilon_3. \tag{2.172b}$$

无穷小生成元为由 (2.171) 确定的 X_1, X_2, X_3 和

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.173}$$

它的 Lie 代数的换位子表为

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	$-X_3$	X_2	0
X_2	X_3	0	0	X_2
X_3	$-X_2$	0	0	X_3
X_4	0	$-X_2$	$-X_3$	0

$\mathbf{R}^2$ 上刚体运动群是 $\mathbf{R}^2$ 上相似群的 3 参数子群. 这也可以从下面的事实得到, 因为具有无穷小生成元 (2.171) 的 Lie 代数是具有无穷小生成元 (2.171) 和 (2.173) 的 4 维 Lie 代数的 3 维子代数.

通过比较射影群 (2.168a,b) 和相似群 (2.172a,b) 的 Lie 代数的无穷小生成元可知, 相似群是一个 8 参数射影群的 4 维子群.

换位子在发现额外的对称方面是最有用的. 例如, 如果 $\mathbf{R}^2$ 上一个问题在旋转对称 $X_1 = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ 和 x 方向上平移对称 $X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$ 都是不变的, 那么它一定在对称 $[X_1, X_2] = -\dfrac{\partial}{\partial y} = -X_3$(即 y 方向上平移对称) 作用下也是不变的.

2.5.4　可解 Lie 代数

下面考虑拥有 r 参数 Lie 变换群的 n 阶 ODEs. 我们证明, 如果 $r = 1$, 那么 ODE 的阶能够构造性地降低一. 如果 $n \geqslant 2$, $r = 2$, 那么可以构造性地降低两阶. 但是, 如果 $n \geqslant 2$, $r > 2$, 并不必须降低更多的阶. 然而, 如果 r 参数群的无穷小生成元的 r 维 Lie 代数具有 q 维可解的子代数, 那么 ODE 的阶可以构造性地降低 q.

定义 2.5.4.1　对所有 $X \in J, Y \in L$, 如果 $[X, Y] \in J$, 那么子代数 $J \subset L$ 称为 L 的理想或正则子代数.

定义 2.5.4.2　L^q 是 q 维可解 Lie 代数, 如果存在子代数链

$$L^{(1)} \subset L^{(2)} \subset \cdots \subset L^{(q-1)} \subset L^{(q)} = L^q, \tag{2.174}$$

使得 $L^{(k)}$ 是一个 k 维 Lie 代数, $L^{(k-1)}$ 是 $L^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, q)$ 的一个理想 ($L^{(0)}$ 为仅仅含有零向量的零理想.)

定义 2.5.4.3　L 称为 Abel Lie 代数, 如果对所有 $X_\alpha, X_\beta \in L$, 有 $[X_\alpha, X_\beta] = 0$.

下面定理的证明是显然的, 留作习题 2.5.12.

定理 2.5.4.1　每个 Able 李代数是可解的.

下面的定理对任意二维 Lie 代数成立.

定理 2.5.4.2　每个二维 Lie 代数是可解的.

证明　令 L 是二维 Lie 代数, 它的基向量为无穷小生成元 X_1, X_2. 假设 $[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2 = Y$. 如果对任意的常数 c_1, c_2, 有 $c_1X_1 + c_2X_2 \in L$, 那么

$$\begin{aligned}
[Y, c_1X_1 + c_2X_2] &= c_1[Y, X_1] + c_2[Y, X_2] \\
&= c_1b[X_2, X_1] + c_2a[X_1, X_2] \\
&= (c_2a - c_1b)Y.
\end{aligned}$$

因此, Y 是 L 的一维理想. 如果 $a = b = 0$, 那么 L 是一个 Abel Lie 代数. □

可以证明: 三维 Lie 代数并不必须是可解的. 例如, 具有如下无穷下因子

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.175}$$

的三维 Lie 代数不是可解的.

作为三维可解 Lie 代数的例子, 考虑刚体运动群 (2.170a,b) 的 Lie 代数. 它的 Lie 代数的可解性可由如下链得到

$$L^{(1)} \subset L^{(2)} \subset L^{(3)} = L,$$

其中 $L^{(3)}$ 具有由 (2.171) 确定的基向量 X_1, X_2, X_3 , $L^{(2)}$ 拥有基向量 X_2, X_3, $L^{(1)}$ 有基向量 X_2.

习　题　2.5

1. 求解初值问题 (2.156a~c), 重新获得 (2.150a,b).
2. 单参数 Lie 变换群 $[r = 1]$ 情况下, 证明结合律 $\phi(a, b)$ 满足

$$\Gamma(\varepsilon) = \left.\frac{\partial \phi(a, b)}{\partial b}\right|_{(a,b)=(\varepsilon^{-1}, \varepsilon)} = \left[\left.\frac{\partial \phi(\varepsilon, \delta)}{\partial \delta}\right|_{\delta=0}\right]^{-1}.$$

提示: 在 $\delta = 0$ 的邻域中, 考虑 $\phi(\varepsilon^{-1}, \phi(\varepsilon, \delta))$.

3. 证明: 共形变换 (保角变换) 集 $x^* = X(x, y), y^* = Y(x, y)$ 构成无穷参数 Lie 变换群, 其中, $F(z) = X(x,y) + \mathrm{i}Y(x,y)$ 在邻域 D 中是解析的. 令 $z = x + \mathrm{i}y$, 给出这个群的无穷小生成元.

4. 考虑拓展的平面上所有一对一的共形变换集, 即双线性 (mobius) 变换

$$z^* = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2.176}$$

其中 $a, b, c, d \in C, z = x + \mathrm{i}y$.

(a) 证明: (2.176) 定义了 6 参数 Lie 变换群;

(b) 给出该群的无穷小生成元;

(c) 建立相应 Lie 代数的换位子表;

(d) 求最大维的子代数, 且恒等于射影群 (2.168a,b) 的 Lie 代数的子代数;

(e) 确定 (2.176) 的子代数, 且参数的最大个数与射影群 (2.168a,b) 的子代数的个数相同.

5. (a) 证明: (2.169) 的无穷小生成元 X_3, X_4, X_6, X_7 构成 4 维 Lie 代数;

(b) 给出相应的 4 参数 Lie 变换群.

6. 证明: 3 参数变换族 $x^* = ax + b, y^* = cx + y$ 并不构成 3 参数 Lie 变换群:

(a) 根据 Lie 变换群的定义;

(b) 根据它的无穷小生成元的代数.

7. 考虑 3 参数变换族

$$x^* = ax + b, \tag{2.177a}$$

$$y^* = cy. \tag{2.177b}$$

(a) 证明: (2.177a,b) 定义了 3 参数 Lie 变换群;

(b) 建立相应 Lie 代数的换位子表;

(c) 证明: (2.177a,b) 的 Lie 代数是可解的.

8. 第 1 章中, 已经证明了在两参数变换族

$$x^* = \alpha(x - \beta t), \tag{2.178a}$$

$$t^* = \alpha^2 t, \tag{2.178b}$$

$$u^* = \frac{1}{\alpha} u \mathrm{e}^{(1/2)\beta x - (1/4)\beta^2 t} \tag{2.178c}$$

作用下 (1.46a~c) 是不变的.

(a) 证明: (2.178a~c) 定义了两参数 Lie 点变换群;

(b) 建立它的 Lie 代数的换位子表.

9. 验证射影变换 (2.168a,b) 将直线映射成直线. 根据它们的无穷小生成元 (2.169) 再次验证之.

10. 证明: $e^{\varepsilon X_\alpha}e^{\delta X_\beta}=e^{\delta X_\beta}e^{\varepsilon X_\alpha}=e^{\varepsilon X_\alpha+\delta X_\beta}$, 当且仅当 $[X_\alpha, X_\beta]=0$.

11. 证明定理 2.5.2.3.

12. 证明定理 2.5.4.1.

13. (a) 证明: 无穷小生成元

$$X_1=(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=xy\frac{\partial}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$$

构成 3 维 Lie 代数 $L^{(3)}$;

(b) 证明: $L^{(3)}$ 并没有 2 维子代数, 因而它不是可解的.

2.6 曲线和曲面映射

在 ODE 拥有的单参数 Lie 点变换群作用下, 解曲线被映成同样微分方程的单参数解曲线族, 或者在群作用下不变. 相应的注释应用于 PDEs 的解曲面.

2.6.1 不变曲面、不变曲线、不变点

定义 2.6.1.1 曲面 $F(x)=0$ 是单参数 Lie 变换群 (2.6) 的不变曲面当且仅当 $F(x)=0$ 时, $F(x^*)=0$.

定义 2.6.1.2 曲线 $F(x,y)$=0 是单参数 Lie 变换群 (2.98a,b) 的不变曲线当且仅当 $F(x,y)=0$ 时, $F(x^*,y^*)=0$.

下面的证明留作习题 2.6.3.

定理 2.6.1.1 (i) 曲面 $F(x)=0$ 是单参数 Lie 变换群 (2.6) 的不变曲面, 当且仅当

$$XF(x)=0,\quad 当F(x)=0时, \tag{2.179}$$

其中 X 是由 (2.24) 确定的无穷小生成元.

(ii) 曲线 $F(x,y)$=0 是单参数 Lie 变换群 (2.98a,b) 的不变曲线, 当且仅当

$$XF(x,y)=0,\quad 当F(x,y)=0时, \tag{2.180}$$

其中 X 是由 (2.98d) 确定的无穷小生成元.

这个定理表明, 可以通过求解 (2.179) 寻找给定 Lie 变换的不变曲面.

具有可解形式 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 的曲线为 (2.98a,b) 的不变曲线, 当且仅当

$$XF(x,y)=\eta(x,y)-\xi(x,y)f'(x)=0,$$

当 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 时, 即当且仅当

$$\eta(x,f(x))-\xi(x,f(x))f'(x)=0. \tag{2.181}$$

作为例子, 考虑尺度群

$$x^*=\mathrm{e}^{\varepsilon}x, \tag{2.182a}$$

$$y^*=\mathrm{e}^{\varepsilon}y. \tag{2.182b}$$

相应的无穷小生成元为

$$X=x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.183}$$

射线 $y-\lambda x=0$ ($x>0$, λ=const) 为 (2.182a,b) 的不变曲线, 因为 $X(y-\lambda x)=y-\lambda x=0$, 当 $y-\lambda x=0$ 时; 抛物线 $y-\lambda x^2=0$ (λ=const) 不是 (2.182a,b) 的不变曲线, 因为 $X(y-\lambda x^2)=y-2\lambda x^2\neq 0$, 当 $y-\lambda x^2=0$.

为了寻找 (2.182a,b) 的所有不变曲线 $y-f(x)=0$, 首先寻找 PDE

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的通解 $u(x,\,y)$, 即 $u(x,y)=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 其中 F 为 y/x 的任意函数. 则不变曲线包含曲线

$$y-\lambda x=0,\quad \lambda=\mathrm{const},\quad x>0\text{或}x<0.$$

定义 2.6.1.3　点 x 是单参数 Lie 变换群 (2.6) 的不变点, 当且仅当在 (2.6) 作用下 $x^*\equiv x$.

下面的证明留作习题 2.6.5.

定理 2.6.1.2　点 x 在单参数 Lie 变换群 (2.6) 作用下是不变点当且仅当

$$\xi(x)=0. \tag{2.184}$$

对于尺度群 (2.182a,b), 注意 $\xi(x,\,y)$=$\eta(x,\,y)$=0 当且仅当 $x=y=0$, 使得唯一的不变点是原点 (0,0).

定义 2.6.1.4　曲面族 $\omega(x)$=const=c 是单参数 Lie 变换群 (2.6) 的不变曲面族, 当且仅当

$$\omega(x^*)\text{=const=}c^*,\quad \text{当 } \omega(x)=c.$$

定义 2.6.1.5　曲线族 $\omega(x,y)$=const=c 是单参数 Lie 变换群 (2.98a,b) 的不变曲线族, 当且仅当

$$\omega(x^*,y^*)\text{=const=}c^*,\quad \text{当 } \omega(x,y)=c.$$

对于常数 c 和群参数 ε 的某个函数 C，从这些定义可知

$$c^* = C(c;\varepsilon). \tag{2.185}$$

定理 2.6.1.3 (i) 曲面族 $\omega(x)$=const=c 是单参数 Lie 变换群 (2.6) 的不变曲面族, 当且仅当对某个无穷次可微函数 $\Omega(\omega)$, 有

$$X\omega = \Omega(\omega). \tag{2.186}$$

(ii) 曲线族$\omega(x,\ y)$=const=c 是单参数 Lie 变换群 (2.98a,b) 的不变曲面族, 当且仅当对某个无穷次可微函数 $\Omega(\omega)$, 有

$$X\omega = \xi(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial y} = \Omega(\omega). \tag{2.187}$$

证明 令 $\omega(x) = c$ 为 (2.6) 的不变曲面族. 则

$$\omega(x^*) = \mathrm{e}^{\varepsilon X}\omega(x) = \omega(x) + \varepsilon X\omega(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}X^2\omega(x) + \cdots = c^* = C(c;\varepsilon).$$

因此, 对某个函数 $\Omega(\omega)$, 当 $\omega(x) = c$ 时, 有 $X\omega(x) = \Omega(\omega)$. 所以有 $X^2\omega = \Omega'(\omega)X\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$.

反之, 假设对某个无穷次可微函数 $\Omega(\omega)$, 有$X\omega(x)$=$\Omega(\omega)$. 则对某个函数 $f_n(\omega)$, $n = 1, 2, \cdots$, 有 $X^2\omega = \Omega'(\omega)\Omega(\omega)$ 和 $X^n\omega = f_n(\omega)$. 如果 $\omega(x) = c$, 那么

$$\begin{aligned}\omega(x^*) &= \mathrm{e}^{\varepsilon X}\omega(x) = \omega(x) + \varepsilon X\omega(x) + \frac{\varepsilon^2}{2}X^2\omega(x) + \cdots \\ &= \omega(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n(\omega(x)) = c + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}f_n(c) = c^*.\end{aligned}$$ □

存在两种不同类型的不变曲面 (曲线) 族. 平凡类型是指该族中的每个曲面 (曲线) 是它自身的不变量, 这种类型用 $\Omega(\omega) \equiv 0$ 刻画. 非平凡类型是指在该族中没有曲面 (曲线) 是它自身的不变量, 即每个曲面 (曲线) 移动到不同的曲面 (曲线), 这种类型用 $\Omega(\omega) \equiv 1$ 描述. 这可以从下面的事实得到: 如果 $\omega(x) = c$ 是不变曲面族, 那么, 对任意函数 F, $F(\omega(x)) = F(c)$ 也是不变曲面族. 因此 $XF(\omega(x)) = F'(\omega)X\omega = F'(\omega)\Omega(\omega)$, 令 $F'(\omega) = 1/\Omega(\omega)$, 可得 $XF(\omega) \equiv 1$. 假设 $\Omega(\omega) \neq 0$, 对于 (2.6), 曲面的不变曲面族中其他某些曲面是它自己的不变曲面.

作为例子, 再考虑尺度群 (2.182a,b), 曲线 $\omega(x,y) = c$ 的不变族满足

$$X\omega = x\frac{\partial\omega}{\partial x} + y\frac{\partial\omega}{\partial y} = 1.$$

相应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$

且它们的通解为

$$\omega(x,y)=\log x+f\left(\frac{y}{x}\right),$$

其中 f 为任意函数. 因此, 对任意选择函数 F 和 f , 曲线

$$F(\omega)=F\left(\log x+f\left(\frac{y}{x}\right)\right)=\mathrm{const}=c \tag{2.188}$$

的任意族是 (2.182a,b) 的不变曲线族. 特别地, 这族圆 $x^2+y^2=\mathrm{const}=r^2$ 是 (2.182a,b) 的不变曲线族, 这可以在 (2.188) 中通过选择 $F(\omega)=\mathrm{e}^{2\omega}$ 和 $f(z)=\frac{1}{2}\log(1+z^2)$ 获得. 这个相应于 $F(\omega)=\mathrm{e}^{\omega}$, $f(z)=0$ 的线族 $x=\mathrm{const}$ 是不变的. 对应于 $F(\omega)=\mathrm{e}^{2\omega}$, $f(z)=\frac{1}{2}(\log(1+z^2)+\arctan z)$ 的对数螺线 $r^2\mathrm{e}^{\theta}=\mathrm{const}$ 是不变的.

2.6.2　曲线映射

考虑单参数 Lie 变换群

$$x^*=X(x,y;\varepsilon)=\mathrm{e}^{\varepsilon X}x, \tag{2.189a}$$

$$y^*=Y(x,y;\varepsilon)=\mathrm{e}^{\varepsilon X}y, \tag{2.189b}$$

其无穷小生成元为

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.189c}$$

考虑曲线 $y=\Theta(x)$. 变换 (2.189a,b) 将曲线 $y=\Theta(x)$ 上的点 $(x,\ y)$ 映成点 (x^*,y^*), 且

$$x^*=X(x,\Theta(x);\varepsilon), \tag{2.190a}$$

$$y^*=Y(x,\Theta(x);\varepsilon). \tag{2.190b}$$

对于固定的值 ε, (2.190a,b) 定义了新曲线的参数表示, 且 x 具有参数的作用 (如图 2.5). 通过将 (2.189a,b) 的逆变换

$$x=X(x^*,y^*;\ -\varepsilon) \tag{2.191}$$

代入 (2.190b), 可以从 (2.190a,b) 中消去 x . 则

$$y^*=Y(X(x^*,y^*;\ -\varepsilon),\Theta(X(x^*,y^*;\ -\varepsilon));\varepsilon)=Y(\mathrm{e}^{-\varepsilon X}x^*,\Theta(\mathrm{e}^{-\varepsilon X}x^*);\varepsilon). \tag{2.192}$$

方程 (2.192) 产生新曲线的 x 和 y 坐标之间的关系式 $y=\phi(x;\varepsilon)$. 通过将 x^* 和 y^* 代入 x 和 y 并且用 $-\varepsilon$ 代替 ε, 我们有如下的定理

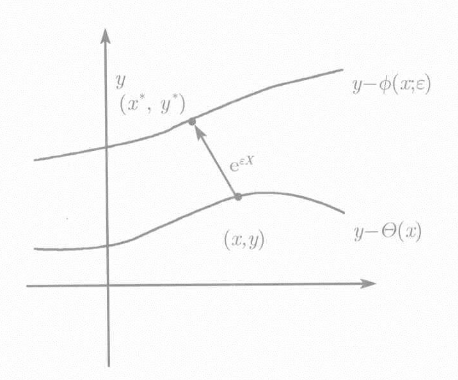


图 2.5 曲线的映射：不同曲线 $y=\phi(x;\varepsilon)$ 对应于参数值 ε

定理 2.6.2.1 假设 $y=\Theta(x)$ 不是 (2.189a,b) 的不变曲线, 那么

$$y=Y(e^{\varepsilon X}x, \Theta(e^{\varepsilon X}x);\ -\varepsilon) \tag{2.193a}$$

$$=Y(X(x,y;\varepsilon), \Theta(X(x,y;\varepsilon));\ -\varepsilon) \tag{2.193b}$$

隐式地定义了一个单参数曲线组 $y=\phi(x;\varepsilon)$.

2.6.3 曲线映射例子

1. *尺度群*

对于尺度群

$$x^*=X=e^{\varepsilon}x, \tag{2.194a}$$

$$y^*=Y=e^{2\varepsilon}y, \tag{2.194b}$$

有

$$y^*=e^{2\varepsilon}\Theta(x)=e^{2\varepsilon}\Theta(e^{-\varepsilon}x^*),$$

因此, $y=\Theta(x)$ 映成曲线族

$$y=e^{2\varepsilon}\Theta(e^{-\varepsilon}x)=\phi(x;\varepsilon). \tag{2.195}$$

2. *射影群*

对于射影群

$$x^*=\frac{x}{1-\varepsilon y}, \tag{2.196a}$$

$$y^*=\frac{y}{1-\varepsilon y}, \tag{2.196b}$$

有

$$y^*=\frac{\Theta(x)}{1-\varepsilon\,\Theta(x)},\quad x=x^*(1-\varepsilon y)=\frac{x^*}{1+\varepsilon y^*}.$$

因此可知

$$y^* = \frac{\Theta\left(\dfrac{x^*}{1+\varepsilon y^*}\right)}{1-\varepsilon\,\Theta\left(\dfrac{x^*}{1+\varepsilon y^*}\right)}.$$

于是, 曲线 $y=\Theta(x)$ 映成曲线族 $y=\phi(x;\varepsilon)$, 其满足隐式方程

$$\frac{y}{1+\varepsilon y} = \Theta\left(\frac{x}{1+\varepsilon y}\right). \tag{2.197}$$

2.6.4 曲面映射

类似于曲线族的公式 (2.193a,b), 我们推导曲面族公式. 考虑单参数 Lie 变换群

$$x^* = X(x,u;\varepsilon) = \mathrm{e}^{\varepsilon X}x, \tag{2.198a}$$

$$u^* = U(x,u;\varepsilon) = \mathrm{e}^{\varepsilon X}u, \tag{2.198b}$$

其无穷小生成元为

$$X = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

考虑曲面 $u=\Theta(x)$, 它在 (2.198a,b) 作用下不是不变量. 变换 (2.198a,b) 将曲线 $u=\Theta(x)$ 上的点 $(x,\ u)$ 映成点 (x^*,u^*) 且

$$x^* = X(x,\Theta(x);\varepsilon), \tag{2.199a}$$

$$u^* = U(x,\Theta(x);\varepsilon). \tag{2.199b}$$

对于固定的值 ε, 通过将 (2.198a,b) 的逆变换

$$x = X(x^*,u^*;\ -\varepsilon)$$

代入 (2.199b), 从 (2.199a,b) 中消去 x. 则

$$u^* = U(X(x^*,u^*;\ -\varepsilon),\Theta(X(x^*,u^*;\ -\varepsilon));\varepsilon) = U(\mathrm{e}^{-\varepsilon X}x^*,\Theta(\mathrm{e}^{-\varepsilon X}x^*);\varepsilon), \tag{2.200}$$

且

$$X = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(x^*,u^*)\frac{\partial}{\partial x_i^*} + \eta(x^*,u^*)\frac{\partial}{\partial u^*}$$

(参看习题 2.3.5). 在 (2.200) 中, 用 (x,u,ε) 代换 $(x^*,u^*,\ -\varepsilon)$, 则有

$$u = U(\mathrm{e}^{\varepsilon X}x,\Theta(\mathrm{e}^{\varepsilon X}x);\ -\varepsilon) = U(X(x,u;\varepsilon),\Theta(X(x,u;\varepsilon));\ -\varepsilon). \tag{2.201}$$

定理 2.6.4.1 假设 $u=\Theta(x)$ 不是 (2.198a,b) 的不变曲面, 那么, (2.201) 隐式地定义了将曲面 $u=\Theta(x)$ 映成单参数曲面组 $u=\phi(x;\varepsilon)$ 的映射.

习 题 2.6

1. 对于变换群 (2.71a,b), 给出不变曲线、不变点以及不变曲线族.

2. 对于变换群 (1.93), 寻找不变曲线 (曲面)、不变点以及不变曲线 (曲面) 族:

(a) (x, t) 空间;

(b) (x, t, u) 空间.

3. 证明定理 2.6.1.1

4. 几何角度解释 (2.181).

5. 证明定理 2.6.1.2.

6. 证明: 如果 $y=\Theta(x)$ 是 (2.189a,b) 的不变曲线, 则对所有 ε, (2.193a,b) 产生 $\phi(x;\varepsilon)\equiv\Theta(x)$.

7. 旋转群

$$x^*=x\cos\varepsilon-y\sin\varepsilon,$$

$$y^*=x\sin\varepsilon+y\cos\varepsilon$$

作用下, 寻找曲线 $y=\Theta(x)$ 的图像 $y=\phi(x;\varepsilon)$.

2.7 局部变换

为了应用到 ODEs 中, 从直接作用在函数 $y=y(x)$ 空间上的变换来观察作用在 (x,y) 空间上的单参数 Lie 点变换群是必要的. 这种观点使得点变换自然地得到推广.

2.7.1 点变换

考虑单参数点变换群 (2.189a,b) 作用下从曲线 $y=\Theta(x)$ 到曲线族 $y=\phi(x;\varepsilon)$ 的映射. 从几何角度来看, 这个变换代表点 (x, y) 到点 (x^*,y^*) 的映射, 这正如在 2.6.2 节中所讨论的 (参如图 2.5), 这对于 $y=\phi(x;\varepsilon)$ 给出了隐式的公式 (2.193b). 显式地描述该映射为曲线 $y=\Theta(x)$ 到曲线 $y=\phi(x;\varepsilon)$ 的变换是重要的. 形式上, 对于某些无穷小生成元 $\hat{X}$(参看图 2.6), 该映射为

$$x^*=x,$$

$$y^*=\phi(x;\varepsilon)=(\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}}y)\Big|_{y=\Theta(x)},$$

现在, 推导无穷小生成元 $\hat{X}$ 的公式. 在 Lie 点变换群 (2.189a,b) 作用下, 有

$$x^*=x+\varepsilon\xi(x,\Theta(x))+O(\varepsilon^2), \tag{2.202a}$$

$$y^*=\Theta(x)+\varepsilon\eta(x,\Theta(x))+O(\varepsilon^2). \tag{2.202b}$$

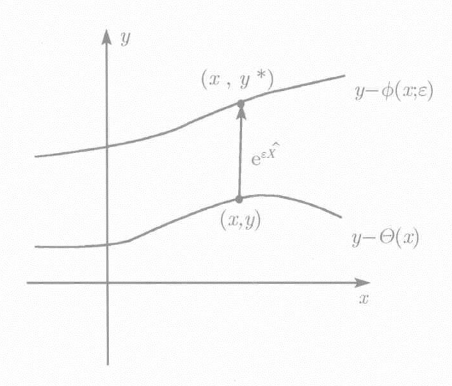


图 2.6　曲线 $y = \Theta(x)$ 映到曲线 $y = \phi(x;\varepsilon)$ 的直接映射

y^* 依赖 x^* 且定义了 $y = \Theta(x)$ 的图像 $y^* =\phi(x^*;\varepsilon)$. 从 (202a,b) 中消去 x, 得到 $\phi(x^*;\varepsilon)$. 关于 x 求解 (2.202a), 可得

$$x = x^* - \varepsilon\xi(x^*, \Theta(x^*)) + O(\varepsilon^2). \tag{2.203}$$

将 (2.203) 代入 (2.202a,b), 且取 ε 的 Taylor 展开, 得

$$\phi(x^*;\varepsilon) = \Theta(x^*) + \varepsilon(\eta(x^*, \Theta(x^*)) - \xi(x^*, \Theta(x^*))\Theta'(x^*)) + O(\varepsilon^2). \tag{2.204}$$

则如果 (3.204) 中用 x 代替 x^*, 变换 (2.189a,b) 作用下 $y = \Theta(x)$ 的图像为

$$y^* = \phi(x;\varepsilon) = \Theta(x) + \varepsilon[\eta(x, \Theta(x)) - \xi(x, \Theta(x))\Theta'(x)] + O(\varepsilon^2). \tag{2.205}$$

观察可知, $y = \Theta(x)$ 的同样图像也能通过使 x 不变的变换

$$x^* = x,$$

$$y^* = y + \varepsilon[\eta(x, y) - \xi(x, y)y'] + O(\varepsilon^2) \tag{2.206}$$

推得. 变换 (2.206) 的无穷小生成元为

$$\hat{X} = [\eta(x, y) - \xi(x, y)y']\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.207}$$

几何学上, 从作用在 (x, y) 空间的变换 (2.189a,b) 移到作用在函数 $y= y(x)$ 空间的变换 (2.206), 无穷小生成元 (2.207) 是无穷小生成元 (2.189c) 的特征形式.

作为例子, 对于尺度群 (2.194a,b), 有

$$\hat{X} = [2y - xy']\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.208}$$

对于映射群 (2.196a,b), 有

$$\hat{X} = [y^2 - xyy']\frac{\partial}{\partial y}. \tag{2.209}$$

2.7.2 接触和高阶变换

我们可以推广具有特征形式 (2.207) 的无穷小生成元的点变换到具有如下形式的无穷小生成元的局部变换

$$\hat{X} = \hat{\eta}(x, y, y', \cdots, y^{(k)})\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.210}$$

其依赖直到有限阶 $\ell = k$ 的导数 $y^{(\ell)}$.

形式上, 对 (2.210) 取指数, 得作用在函数 $y = y(x)$ 空间上的单参数变换群

$$x^* = x,$$

$$y^* = y + \varepsilon\hat{\eta} + O(\varepsilon^2). \tag{2.211}$$

为了计算高阶项, 通过要求保持接触条件, 即

$$(y^*)' = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x} = D(y + \varepsilon\hat{\eta} + O(\varepsilon^2)) = y' + \varepsilon D\hat{\eta} + O(\varepsilon^2),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{*(j)} = \frac{\mathrm{d}y^{*(j-1)}}{\mathrm{d}x} = D(y^{(j-1)} + \varepsilon D^{j-1}\hat{\eta} + O(\varepsilon^2)) = y^{(j)} + \varepsilon D^j\hat{\eta} + O(\varepsilon^2),$$

可以推广 $\hat{X}$ 到作用于 $y', y'', \cdots, y^{(j)}$, 其中 $y^{(j)} = \mathrm{d}^j y/\mathrm{d}x^j$, $j \geqslant 1$, D 为全导数算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$.

因此, 拓展的无穷小生成元 ($\hat{X}$ 的延拓) 为

$$\hat{X}^{(\infty)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \hat{\eta}^{(j)}\frac{\partial}{\partial y^{(j)}} + \cdots, \tag{2.212a}$$

其中

$$\hat{\eta}^{(1)} = D\hat{\eta} = \frac{\partial\hat{\eta}}{\partial x} + y'\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial y} + \cdots + y^{(k+1)}\frac{\partial\hat{\eta}}{\partial y^{(k)}}, \tag{2.212b}$$

$$\hat{\eta}^{(j)} = D\hat{\eta}^{(j-1)}, \quad j \geqslant 1. \tag{2.212c}$$

所以, 无穷小生成元 (2.210) 的指数产生下面的变换:

定义 2.7.2.1 单参数局部变换群是具有如下形式的变换:

$$x^* = x,$$

$$y^* = \mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}^{(\infty)}}y = y + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^j}{j!}(\hat{X}^{(\infty)})^{j-1}\hat{\eta}, \tag{2.213}$$

其中 $\hat{X}^{(\infty)}$ 由 (2.112a) 确定. 注意, 可以通过逆指数使 (2.213) 转化.

局部变换对应于点变换, 当且仅当对 $\eta(x,y)$, $\xi(x,y),\hat{\eta}$ 具有形式 $\hat{\eta}=\eta(x,y)-\xi(x,y)y'$, 即 $\hat{\eta}$ 关于 y' 是线性的且不依赖 y 的高阶导数. 局部变换 (2.213) 称为接触变换, 如果 $\hat{\eta}$ 具有形式 $\hat{\eta}=\hat{\eta}(x,y,y')$. 否则, 局部变换称为高阶变换. 可以证明局部变换对应于作用在某有限维空间 $(x,y,y',\cdots,y^{(p)})$ $(p\geqslant 1)$ 上的拓展变换, 当且仅当它是接触变换.

2.7.3 局部变换例子

1. 尺度群

对于尺度群 (2.194a,b), 无穷小生成元 (2.208) 的延拓为

$$
\begin{aligned}
\hat{X}^{(\infty)}=&(2y-xy')\frac{\partial}{\partial y}+(y'-xy'')\frac{\partial}{\partial y'}-xy'''\frac{\partial}{\partial y'''}-(y'''+xy^{(4)})\frac{\partial}{\partial y'''}+\cdots\\
&-((j-2)y^{(j)}+xy^{(j+1)})\frac{\partial}{\partial y^{(j)}}+\cdots.
\end{aligned}\tag{2.214}
$$

曲线 $y=\Theta(x)$ 映成曲线族, $y=\phi(x;\varepsilon)$ 具有如下形式

$$
\begin{aligned}
\phi(x;\varepsilon)&=(\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}^{(\infty)}}y)\Big|_{y=\Theta(x)}\\
&=[y+\varepsilon(2y-xy')+\frac{1}{2}\varepsilon^2(4y-2xy'-xy'+x^2y'')+O(\varepsilon^3)]\Big|_{y=\Theta(x)}\\
&=\Theta(x)+\varepsilon[2\Theta(x)-x\Theta'(x)]+\frac{1}{2}\varepsilon^2[4\Theta(x)-3x\Theta'(x)+x^2\Theta''(x)]+O(\varepsilon^3).
\end{aligned}\tag{2.215}
$$

表达式 (2.215) 为映射 (2.195) 的 Taylor 级数.

2. 射影群

对于射影群 (2.196a,b), 无穷小生成元 (2.209) 的延拓为

$$
\hat{X}^{(\infty)}=(y^2-xyy')\frac{\partial}{\partial y}+(yy'-x(y')^2-xyy'')\frac{\partial}{\partial y'}-(3xy'y''+xyy''')\frac{\partial}{\partial y''}+\cdots.\tag{2.216}
$$

因此, 曲线 $y=\Theta(x)$ 映成曲线族 $y=\phi(x;\varepsilon)$, 具有如下形式

$$
\begin{aligned}
&\phi(x;\varepsilon)=(\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}^{(\infty)}}y)\Big|_{y=\Theta(x)}\\
=&[y+\varepsilon(y^2-xyy')+\frac{1}{2}\varepsilon^2((y^2-xyy')(2y-xy')\\
&-xy(yy'-x(y')^2-xyy''))+O(\varepsilon^3)]\Big|_{y=\Theta(x)}\\
=&\Theta(x)+\varepsilon[\Theta^2(x)-x\Theta(x)\Theta'(x)]\\
&+\frac{1}{2}\varepsilon^2[2\Theta^3(x)-4x\Theta^2(x)\Theta'(x)+2x^2\Theta(x)(\Theta'(x))^2+x^2\Theta^2(x)\Theta''(x)]+O(\varepsilon^3).
\end{aligned}\tag{2.217}
$$

表达式 (2.217) 产生由隐式方程 (2.197) 所给映射的显式的 Taylor 级数.

习　题　2.7

1. 考虑旋转群

$$x^* = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon,$$
$$y^* = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon.$$

(a) 给出拓展的无穷小生成元 $\hat{X}^{(\infty)}$.

(b) 用含无穷小生成元 $\hat{X}^{(\infty)}$ 的局部变换计算曲线 $y = \Theta(x)$ 的图像到 $O(\varepsilon^3)$, 将所得到的结果与习题 2.6.7 的结果进行比较.

2. 证明：(2.197) 的 $O(\varepsilon^3)$ 的 Taylor 展开与 (2.217) 一致.

3. 考虑点变换

$$x^* = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2),$$
$$y^* = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2),$$

且无穷小生成元为

$$X^{(\infty)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \eta^{(k)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} + \cdots. \tag{2.218}$$

证明：拓展的无穷小生成元 (2.218) 的特征形式为

$$\hat{X}^{(\infty)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots + \hat{\eta}^{(k)}\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} + \cdots,$$

其中

$$\hat{\eta} = \eta - y'\xi, \quad \hat{\eta}^{(k)} = \eta^{(k)} - y^{(k+1)}\xi = D^k\eta - \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!\,j!}y^{(k+1-j)}D^j\xi, \quad k \geqslant 1. \tag{2.219}$$

2.8　讨　论

本章讨论单参数 Lie 变换群, 其完全是由它们的无穷小变换确定的. 事实上, 这样群是单参数连通局部 Lie 变换群 (Gilmore, 1974; Olver, 1986; Ovsiannikov, 1962, 1982). 对于研究微分方程的不变性, Lie 群的全局性质是不重要的.

利用单参数 Lie 变换群的无穷小生成元, 可以构造各种不变量 (不变曲面、不变点、不变曲面族), 而且, 对于单参数 Lie 点变换群, 可以确定正则坐标, 因而变换群变为一个平移群.

将 Lie 群应用于研究微分方程的不变性时, 群变换的坐标分成自变量和因变量. 作用在自变量和因变量空间上的单参数列变换群, 自然地推广 (延拓) 到作用在放大空间 (jet 空间) 单参数 Lie 变换群, 该放大空间包括因变量的所有直到固定有限阶的导数. 这可以通过要求群作用下保持导数关系, 或等价于保持联系高阶微分的接触条件来实现. 这个要求包括群作用到任意放大空间 (高阶 jet 空间) 的唯一推广 (延拓). 结果, 单参数推广 (延拓) 的 Lie 变换群完全由它们的无穷小来刻画. 而且, 这些推广 (延拓) 的无穷小可由作用在自变量和因变量空间上群的无穷小来确定. 于是可以建立一个算法, 以确定给定微分方程拥有的无穷小变换.

多参数 Lie 变换群的研究可约化为单参数子群的无穷小生成元的研究. 无穷小生成元构成一个向量空间, 称为 Lie 代数, 其在换位子作用下是封闭的. 多参数 Lie 变换群作用下微分方程的不变性性质完全可由它的 Lie 代数刻画. 在将无穷小变换应用于微分方程中, 多参数群的 Lie 代数的结构 (换位子表) 具有重要的作用.

除了点变换, 考虑更广的高阶变换 (以及非局部变换) 可知, 从将给定曲线 (曲面) 映成另一个曲线 (曲面) 且自变量固定的观点, 观察群变换是重要的. 在研究高阶变换作用下微分方程的不变性方面, 这是特别必要的.

我们所提出的 Lie 变换群已经强调基本的计算, 以及应用于 ODEs(第 3 章) 和 PDEs(第 4 章) 所需要的 Lie 群理论的代数模样. 虽然在那些应用中是次要的, 但 Lie 群理论在微分几何方面提供了一个补充的观点以及本章中所得到的结果的几何解释 (Olver, 1986; Warner, 1983).

一个单参数 Lie 变换群的 (延拓) 作用定义了 (高阶)jet 空间中的一条可微曲线. 几何学上, 变换的无穷小生成元代表在给定点处该曲线的切向量. 对于 m 个自变量和 n 个因变量, 阶的 jet 空间是 $(m+n)[(n+k)!/(k!\,m!)]$ 维的可微流形. 该流形的向量场的切空间是由坐标向量场定义的, 且关于 jet 空间坐标是偏导数算子. 因而, 辅助于单参数 Lie 变换群的切向量场的基本分量是该变换的延拓的无穷小. 对于 r 参数的 Lie 变换群, 辅助的 r 个切向量场是线性无关的且对合的, 即它们的生成是 r 维的向量空间且包含所有它们的换位子 (Lie 括号). 特别地, 基本 jet 空间的每一点, 这些向量场生成 r 维 Lie 代数. 结果, 变换群的作用定义了 jet 空间上的一个 r 维曲面.

Jet 空间上的 r 参数 Lie 变换群自然地看作基本抽象 r 维连通 Lie 群的一个表示. 这样的 Lie 群是可微流形, 在其上存在给定的结构 (结合律)$\phi : G\times G \to G$, 使得 G 上的群元素 (点) 的乘积和逆由可微映射给定. 映射 $L_g : G \to G$ 和 $R_g : G \to G$ 分别由 G 上的固定群元素 g 的左乘和右乘定义, 且在抽象 Lie 群理论中具有重要的作用. 作用在 G 中单位元 e 处的切向量上可微映射, 确定了 G 中的相应的左或右不变向量场, r 维 Lie 群上所有左或右不变向量场的代表集合构成 r 维向量空间, 其拥有由换位算子给定的 Lie 括号结构. 本章中, Lie 的三个基本定理具有简单的

几何意义.

Lie 第一基本定理主要陈述, G 的一维 Lie 子群等价于 G 上左或右不变向量场的积分曲线, 且左或右不变向量场由 G 中单位元 e 的切向量确定. G 中两个左或右不变向量场的 Lie 括号测量的是它们是对合的范围, 即它们相应积分曲线接近构成 G 中的二维可微流形 (曲面), 当且仅当 Lie 括号包含在这两个向量场的生成空间中. Lie 的第二和第三定理反映 G 中的左或右不变向量场的向量空间具有 Lie 代数的结构, 该 Lie 代数的换位子结构与 G 中所有点处的结构是一样的, 因为向量场的不变性性质.

因此, 辅助于 r 维的任意抽象连通的 Lie 群是唯一的 r 维 Lie 代数. 反之, 对应于任意抽象 r 维 Lie 代数, 存在唯一单连通 Lie 群 G. 更一般地, 对于那样一个 Lie 群, 在它的 k 维 Lie 子群和 k 维 Lie 代数之间存在一个一对一的对应. 事实上, 几何学上, G 的 k 维 Lie 子群是 k 维子流形 (曲面), 且由 G 的左或右不变向量场的积分曲线是由 G 的单位元 e 处的切向量场的对合 k 维子空间确定的. 最后, 几何上可解 r 维 Lie 群是由拥有的 $1, 2, \cdots, r$ 维积分子流形的升链来刻画的, 这些积分子流形是由 Lie 群上的对合的左或右不变向量场的积分曲线生成的.

第 3 章　常微分方程

3.1　引　言

对称和首次积分是常微分方程 (ODEs) 的两个基本结构. 几何学上, 可以自然地将 n 阶 ODE 看作 $n+2$ 维空间上的一个曲面, 该空间的坐标由自变量、因变量和它的直到 n 阶的导数给定, 使得 ODE 的解是位于该曲面上的特殊曲线. 从这个观点来看, 一个对称表示一个将每个解曲线移动到解曲线的运动; 首次积分表示沿每个解曲线守恒量 (更精确地说, 对称是作用在 $n+2$ 维空间上的单参数局部变换群, 其将解映成解; 首次积分是由包含自变量、因变量和它的直到 $n-1$ 阶导数构成的坐标的函数所表示的求积分, 它是每个解上的常数).

本章将证明如何发现一个 n 阶 ODE 所拥有对称和首次积分. 我们从两个不同的观点来研究 ODEs 的积分.

Lie 证明, 如果一个给定 ODE 拥有一个单参数点变换群 (点对称), 则 ODE 的阶可约减一, 而且约化的 ODE 的解和求积分产生给定 ODE 的解.

如果 n 阶 ODE 拥有 r 参数可解点变换群, 则它可以约化为 $n-r$ 阶 ODE 和 r 个求积分. 当 $r=n$ 时, 根据 n 个求积分, 可以获得 ODE 的通解. 当 $r<n$ 时, 所约化的 $n-r$ 阶 ODE 利用了被推导的自变量和因变量. 一般地, 当根据最初的自变量和因变量表示时 (典型地, 它还是 n 阶), 这个 ODE 不具有 $n-r$ 阶.

对于一阶 ODE, Lie 对称约化产生 ODE 的求积分. Lie 表明, 这等价于发现 ODE 的首次积分和相应的积分因子.

对于 n 阶 ODE, 一个首次积产生一个求积分, 将 ODE 的阶约减一. 给定 ODE 的首次积分等价于获得 ODE 的积分因子.

如果 n 阶 ODE 拥有 n 个已知的函数无关的首次积分, 则根据 n 个基本常数可获 ODE 的通解. 另一方面, 如果仅仅知道 $r<n$ 个函数无关的首次积分, 则根据 r 个基本常数, 该 ODE 约化 $n-r$ 阶 ODE. 与对称约化比较, 在求积分因子方法中, 根据最初的自变量和因变量, 约化的 ODE 具有 $n-r$ 阶.

对于给定的 ODE, 积分因子方法和 Lie 约化方法是互补的. 然而, 计算对称和积分因子的算法是类似的. 对称是给定 ODE 的线性化 (Frechét 导数) 的解, 且该线性化对给定 ODE 的所有解都成立. 另一方面, 积分因子是一个线性系统的解, 且该系统包括对给定 ODE 所有解都成立的给定 ODE 的线性化.

对称约化也可以应用于 ODEs 的边值问题中. 如果一个对称约化 ODE 的阶,

则同样的约化对任意边值问题也成立.

如果 ODE 拥有 Lie 变换群, 则可以构造有意义的特解 (不变解), 其对应于所拥有 Lie 变换群的不变曲线. 对于一阶 ODE, 这样的不变解可以代数地被确定, 且包含分界线和包络解. 对于高阶 ODEs, 不变解可以代数地或求解群的不变曲线的一阶 ODE 确定.

为了阐述对称约化及其与一阶 ODEs 积分因子的联系, 考虑两个初等的例子:

1. 平移群

一阶 ODE

$$y_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x) \tag{3.1}$$

平凡地约化为求积分

$$y = \int F(x)\mathrm{d}x + C. \tag{3.2}$$

显然, ODE (3.1) 的右边不依赖 y. 特别地, ODE (3.1) 拥有单参数 (ε)Lie 变换群

$$x^* = x, \tag{3.3a}$$

$$y^* = y + \varepsilon, \tag{3.3b}$$

由

$$y_1^* = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y_1 \quad 和 \ F(x^*) = F(x)$$

可知, 群 (3.3a,b) 作用下曲面 $y_1 = F(x)$ 在 (x, y, y_1) 空间上是不变的.

而且易知, 群 (3.3a,b) 作用下 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \tag{3.4}$$

是不变的, 当且仅当对所有参数 ε, 有

$$f(x^*, y^*) \equiv f(x, y + \varepsilon) \equiv f(x, y),$$

即 $f(x, y)$ 与 y 无关, 或等价于 $f(x, y) \equiv F(x)$, 其中 $F(x)$ 为某个函数. 因此, (3.1) 约化为积分面积 (3.2) 等价于平移群 (3.3a,b) 作用下 (3.1) 的不变性.

群 (3.3a,b) 作用下, ODE (3.1) 的解曲线 $y = \Theta(x)$ 映成曲线 $y^* = \Theta(x^*)$, 其相应于 (3.1) 的解曲线 $y = \Theta(x) - \varepsilon$(如图 3.1). 因此, 由平移群 (3.3a,b) 作用下 (3.1) 的不变性知, 如果 $y = \Theta(x)$ 是 (3.1) 的特解, 那么 $y = \Theta(x) + C$ 是 (3.1) 的通解, 其中 C 为任意常数.

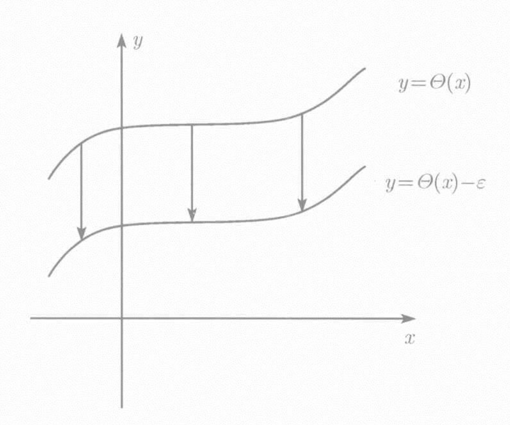


图 3.1

由求积分 (3.2) 可知

$$y - \int F(x)\mathrm{d}x = C \tag{3.5}$$

是 (3.1) 的首次积分. 微分首次积分 (3.5), 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y - \int F(x)\mathrm{d}x\right] = y' - F(x) = 1 \cdot (y' - F(x)) = 0,$$

因此, 函数

$$\mu(x, y) \equiv 1 \tag{3.6}$$

是 ODE (3.1) 的积分因子, 其产生首次积分 (3.5).

2. *尺度群*

一般地, 称一阶 ODE

$$y_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.7}$$

为齐次方程, 它拥有单参数尺度群

$$x^* = \alpha x, \tag{3.8a}$$

$$y^* = \alpha x. \tag{3.8b}$$

因为

$$y_1^* = \frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}x^*} = \frac{\alpha \mathrm{d}y}{\alpha \mathrm{d}x} = y_1 \quad 和\ F\left(\frac{y^*}{x^*}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

所以, 群 (3.8a,b) 作用下 ODE (3.7) 的解曲线 $y = \Theta(x)$ 映成曲线 $y^* = \Theta(x^*)$, 其对应于 (3.7) 的解曲线

$$y = \frac{1}{\alpha}\Theta(\alpha x). \tag{3.9}$$

因而可知, 如果 $y=\Theta(x)$ 是 ODE (3.7) 的特解, 且曲线 $y-\Theta(x)=0$ 在 (3.8a,b) 不是不变的 (即对某些固定的常数 λ, 有 $\Theta(x)\neq\lambda x$), 那么

$$y=\frac{1}{C}\Theta(Cx)$$

为 (3.7) 的通解, 其中 C 为任意常数.

由尺度群 (3.8a,b) 作用下的不变性, ODE (3.7) 阶的约化可以通过选择如下正则坐标 (新坐标) 实现

$$r=\frac{y}{x}, \tag{3.10a}$$

$$s=\log y. \tag{3.10b}$$

利用从新参数化 $\varepsilon=\log\alpha(\alpha>0)$, 在单参数 Lie 平移群

$$r^*=r, \tag{3.11a}$$

$$s^*=s+\varepsilon \tag{3.11b}$$

作用下, 相应地, ODE (3.7) 是不变的. 因此, 从第一个例子可知, 根据正则坐标 (3.10a,b), 对于某个函数 $G(r)$, ODE (3.7) 一定具有形式

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=G(r), \tag{3.12}$$

所以, ODE (3.7) 的通解为

$$s=\int G(r)\mathrm{d}r+C, \tag{3.13}$$

或者根据坐标 x 和 y , 具有形式

$$y=C^*\exp\left[\int^{y/x}G(r)\mathrm{d}r\right],\quad C^*=\text{ const.} \tag{3.14}$$

函数 $G(r)$ 被确定如下:

$$\mathrm{d}s=\frac{1}{y}\mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}r=-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{x}\mathrm{d}y,$$

因此

$$G(r)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{y_1}{ry_1-r^2}=\frac{F(r)}{rF(r)-r^2}, \tag{3.15}$$

其中 $F(r)$ 为 ODE (3.7) 中给定的函数.

由积分面积 (3.13) 可知

$$\log y-\int^{y/x}G(r)\mathrm{d}r=C \tag{3.16}$$

是 (3.7) 的首次积分. 微分 (3.16) 并且收集 y' 项, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\log y-\int^{y/x}G(r)\mathrm{d}r\right]=\frac{1}{y-xF\left(\frac{y}{x}\right)}\cdot\left(y'-F\left(\frac{y}{x}\right)\right)=0.$$

因此, 函数

$$\mu(x,y)=\frac{1}{y-xF\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{3.17}$$

是 ODE (3.7) 的积分因子, 且产生它的通解 (3.16).

习　题　3.1

1. 考虑 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}. \tag{3.18}$$

(a) 由如下尺度变换作用下的不变性, 获得 ODE (3.18) 的通解:

(i) $x^*=\alpha x, y^*=\alpha y$;

(ii) $x^*=x, y^*=\beta y$.

(b) 求相应的积分因子.

(c) $y=\Theta(x)=x$ 是 (3.18) 的解曲线. 对于 (a) 中两个群中每一个, 发现这个解曲线的图像, 并解释所得结果.

2. 考虑 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=A(x)B(y). \tag{3.19}$$

(a) 求 (3.19) 的积分因子.

(b) 求 (3.19) 拥有的单参数 Lie 变换群.

3. 证明: 最一般的一阶 ODE: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$ 拥有群

$$x^*=\alpha x,$$

$$y^*=\alpha^2 y.$$

4. 求使得直线族 $y=cx$ 保持不变的单参数 Lie 变换群的公式.

3.2　一阶 ODEs

考虑点变换应用于研究一阶 ODE

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y). \tag{3.20}$$

假设 ODE (3.20) 拥有单参数 Lie 点变换群, 称为点对称,

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon\xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{3.21a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon\eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \tag{3.21b}$$

且无穷小生成元为

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.21c}$$

首先, 从两种方法:

(i) 利用正则坐标;

(ii) 利用积分因子

证明从群 (3.21a,b) 的无穷小 $\xi(x,\ y)$, $\eta(x,\ y)$ 如何寻找 ODE (3.20) 的通解.

如果 ODE (3.20) 的特解是已知的, 且该特解不是点对称 (3.21a,b) 的不变曲线, 那么隐式公式 (2.193a,b) 产生 (3.20) 的通解.

考虑给定一阶 ODE (3.20) 拥有的点对称 (3.21a,b) 的确定问题. 我们也证明如何发现拥有给定点对称的所有一阶 ODEs.

3.2.1 正则坐标

正如 2.3.5 节中讨论的, 给定任意单参数 Lie 点变换群 (3.21a,b), 存在正则坐标 $(r(x, y), s(x, y))$, 使得 (3.21a,b) 变为平移群

$$r^* = r, \tag{3.22a}$$

$$s^* = s + \varepsilon. \tag{3.22b}$$

这些坐标可以通过求解

$$Xr = 0,$$

$$Xs = 1$$

得到. 根据正则坐标, ODE (3.20) 变为 ODE

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'} = \frac{s_x + s_y f(x, y)}{r_x + r_y f(x, y)} = F(r, s), \tag{3.23}$$

其中 $F(r, s)$ 可以通过将 x 和 y 代入 $[s_x + s_y f(x, y)]/[r_x + r_y f(x, y)]$ 得到. ODE (3.20) 不变性以及平移群 (3.22a,b) 作用下 ODE (3.23) 意味着 $F(r,\ s)$ 并不显式地依赖 s . 因此, ODE (3.23) 必须具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = G(r) = \frac{s_x + s_y f(x, y)}{r_x + r_y f(x, y)}. \tag{3.24}$$

从而, ODE (3.20) 的通解具有如下的隐式形式

$$s(x,y)=\int^{r(x,y)}G(\rho)\mathrm{d}\rho+C,\quad C=\text{const.}\tag{3.25}$$

在 3.1.1 节中, 根据尺度 (3.8a,b) 作用下不变性的正则坐标, 我们可解一阶齐次 ODE (3.7). 现在根据正则坐标, 考虑两个熟悉的例子.

1. 线性齐次方程

一阶线性齐次 ODE

$$y'+p(x)y=0\tag{3.26}$$

拥有单参数 Lie 尺度变换群

$$x^*=x,\tag{3.27a}$$

$$y^*=\alpha y.\tag{3.27b}$$

根据相应正则坐标

$$r=x,\tag{3.28a}$$

$$s=\log y,\tag{3.28b}$$

ODE (3.26) 变为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{y'}{y}=-p(r).\tag{3.29}$$

因此, ODE (3.26) 的通解为

$$s(x,y)=\log y=-\int^{x}p(\rho)\mathrm{d}\rho+C,$$

或者

$$y=\widetilde{C}\exp\left[-\int^{x}p(\rho)\mathrm{d}\rho\right],\quad \widetilde{C}=\text{const.}$$

2. 线性非齐次方程

一阶线性非齐次 ODE

$$y'+p(x)y=g(x)\tag{3.30}$$

拥有单参数 Lie 变换群

$$x^*=x,\tag{3.31a}$$

$$y^*=y+\varepsilon\phi(x),\tag{3.31b}$$

其中 $u=\phi(x)$ 是辅助线性齐次 ODE 的任意特解

$$u'+p(x)u=0.\tag{3.32}$$

对应于 (3.31a,b) 的无穷小生成元为

$$X = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

因此, $Xs = 1$ 具有解 $s = y/\phi(x)$. 根据正则坐标

$$r = x, \tag{3.33a}$$

$$s = \frac{y}{\phi(x)}, \tag{3.33b}$$

ODE (3.30) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{g(r)}{\phi(r)},$$

其拥有通解

$$\frac{y}{\phi(x)} = \int^x \frac{g(\rho)}{\phi(\rho)}\mathrm{d}\rho + C.$$

因此, ODE (3.30) 的通解为

$$y = \phi(x)\int^x \frac{g(\rho)}{\phi(\rho)}\mathrm{d}\rho + C\phi(x), \quad C = \text{const}. \tag{3.34}$$

3.2.2 积分因子

一阶 ODE (3.20) 的通解是一族曲线

$$\omega(x,y) = \text{const}. \tag{3.35}$$

进而有

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = \omega_x + \omega_y y' = 0, \tag{3.36}$$

因此, 对 ODE (3.20) 的所有解, 下面的方程成立

$$\omega_x + f(x,y)\omega_y = 0. \tag{3.37}$$

假设 ODE (3.20) 拥有单参数 Lie 点变换群 (3.21a,b). 因此, (3.21a,b) 使得解曲线族 (3.35) 不变. 进一步假设在群 (3.21a,b) 作用下, ODE (3.20) 的解曲线 (3.35) 是 (3.21a,b) 的不变曲线. 那么, 不失一般性, 解曲线族 (3.35) 满足 (参考 2.6.1 节)

$$X\omega = \xi(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\omega}{\partial y} = 1, \tag{3.38}$$

且 $\eta \neq \xi f$, 其中 X 是无穷小生成元 (3.21c). 对于 ω_x , 将 (3.37) 代入 (3.38), 得

$$\omega_y = \frac{1}{\eta - \xi f}, \tag{3.39a}$$

因此

$$\omega_x = -\frac{f}{\eta - \xi f}. \tag{3.39b}$$

将 (3.39a,b) 代入 (3.36), 有

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\eta - \xi f}(y' - f).$$

从而

$$\mu(x,y) = \frac{1}{\eta - \xi f} \tag{3.40}$$

是 ODE (3.20) 的积分因子.

积分因子 (3.40) 产生 ODE (3.20) 的通解

$$\omega(x,y) = -\int \mu(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x + \int \left[\mu(x,y) + \int (\mu(x,y)f(x,y))_y \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \text{const.} \tag{3.41}$$

相反, 可以证明, 如果 $\mu(x,y)$ 是一阶 ODE (3.20) 的积分因子, 那么任意满足 (3.40) 的 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 定义了一阶 ODE (3.20) 拥有的单参数 Lie 变换群的无穷小生成元 (3.21c).

3.2.3　解曲线的映射

下面的定理是关于作用在一阶 ODE (3.20) 的解曲线上的单参数 Lie 变换群.

定理 3.2.3.1　对任意函数 $\xi(x,y)$, 单参数 Lie 变换群

$$X = \xi(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial x} + f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right] \tag{3.42}$$

使得一阶 ODE$y' = f(x,y)$ 的每个解曲线不变.

证明　令 $y = \Theta(x)$ 是 $y' = f(x,y)$ 的解曲线. 则

$$y' = \Theta'(x) = f(x, \Theta(x)). \tag{3.43}$$

考虑无穷小生成元 (3.42), 则

$$X(y - \Theta(x)) = \xi(x,y)[f(x,y) - \Theta'(x)].$$

因此, 如果 $y = \Theta(x)$, 那么由 (3.43) 得

$$X(y - \Theta(x)) = \xi(x, \Theta(x))[f(x, \Theta(x)) - \Theta'(x)] = 0.$$

从而, $y = \Theta(x)$ 是具有无穷小生成元 (3.42) 的单参数 Lie 变换群的不变曲线.

定理 3.2.3.2 对于任意函数 $\xi(x,y)$ 和某个函数 $\eta(x,y) \neq \xi(x,y)f(x,y)$, 一阶 ODE $y' = f(x,y)$ 拥有具有无穷小生成元$X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的单参数 Lie 变换群, 该群作用下, ODE 的每个解曲线映成该方程的不同的解曲线.

证明 令 $\omega(x,y) = \text{const}$ 是 $y' = f(x,y)$ 的解曲线. 则

$$\omega_x + \omega_y f = 0. \tag{3.44}$$

对于任意函数 $\xi(x,y)$, 考虑无穷小生成元 $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$, 且 $\eta(x,y)$ 由关系 $\omega_y = 1/(\eta - \xi f)$ 确定. 那么从 $X\omega = \xi\omega_x + \eta\omega_y$, 利用 (3.44) 可得 $X\omega = (\eta - \xi f)\omega_y = 1$. 因此, 具有无穷小生成元的单参数 Lie 变换群将 ODE 的解曲线映成不同的解曲线 (参看习题 2.6.1). □

从定理 3.2.3.1 和定理 3.2.3.2, 任意一阶 ODE (3.20) 拥有两种类型的单参数 Lie 变换群. 而且, ODE (3.20) 拥有两种无穷参数 Lie 变换群:

类型 (i) 平凡单参数变换群. ODE $y' = f(x,y)$ 总拥有如下的无穷小生成元

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\eta}{\xi} \equiv f(x,y),$$

这里, $y' = f(x,y)$ 的每个解曲线是不变曲线. 这种类型的群对于约化 $y' = f(x,y)$ 成为求积分是无用的, 因为为了发现群的正则坐标, 必须首先寻找 $y' = f(x,y)$ 的通解.

类型 (ii) 非平凡单参数变换群. 在邻域 D 中, ODE $y' = f(x,y)$ 拥有具有无穷小生成元

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

的单参数 Lie 群, 其中 $\eta/\xi \neq f(x,y)$, 它的解曲线族是 D 中的不变量, 且 D 中的每个解曲线移到 D 中不同的解曲线. 这种类型的群定义了非平凡的 Lie 变换群. 如果可以求解 ODE $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \eta/\xi$ 获得正则坐标 $r(x,y)$, 那么它对于约化 $y' = f(x,y)$ 成为求积分是有用的.

图 3.2 给出了几何解释. 这里 $\xi^{(\mathrm{i})}(x) = (\xi^{(\mathrm{i})}(x,\ y),\ \eta^{(\mathrm{i})}(x,\ y))$ 是 $y' = f(x,y)$ 拥有的类型 (i) 中单参数 Lie 群 $G^{(\mathrm{i})}$ 的无穷小, $\xi^{(\mathrm{ii})}(x)= (\xi^{(\mathrm{ii})}(x,\ y),\ \eta^{(\mathrm{ii})}(x,\ y))$ 是 $y' = f(x,y)$ 拥有的类型 (ii) 中单参数 Lie 群 $G^{(\mathrm{ii})}$ 的无穷小; γ 是 $y' = f(x,y)$ 的任意解曲线 $y = \Theta(x)$. 因为 $\eta/\xi \equiv f$, 所以 $\xi^{(\mathrm{i})}(x)$ 是 γ 的切线. 但是, 因为 $\eta/\xi \neq f$, 所以 $\xi^{(\mathrm{ii})}(x)$ 不是 γ 的切线. 从而 $G^{(\mathrm{i})}$ 使得 γ 保持不变, 而 $G^{(\mathrm{ii})}$ 将 γ 映成具有无穷小生成元的单参数解曲线族, 该曲线族由公式 (2.193a,b) 隐式给出, 或公式 (2.201) 显式给出.

$$X = \xi^{(\mathrm{ii})}(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta^{(\mathrm{ii})}(x,y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

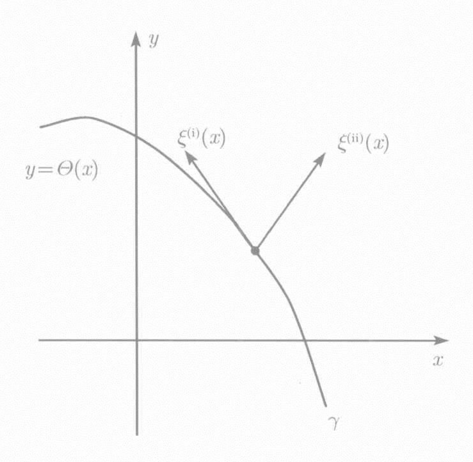


图 3.2　类型 (i) 和 (ii) 群的展示

3.2.4　一阶常微分方程组的确定方程

一阶 ODE

$$y' = f(x, y) \tag{3.45}$$

在 (x, y, y_1) 空间上定义相应的曲面

$$y_1 = f(x, y), \tag{3.46}$$

且 (3.45) 的解 $y = \Theta(x)$ 对应于点 $(x, y, y_1) = (x, \Theta(x), \Theta'(x))$, 即当 $y = \Theta(x)$ 满足 (3.45) 时, $y_1 = y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.

考虑单参数 Lie 变换群

$$x^* = X(x, y; \varepsilon), \tag{3.47a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon). \tag{3.47b}$$

定义 3.2.4.1　群 (3.47a,b) 使得 ODE(3.45) 保持不变, 即它是 ODE (3.45) 拥有的点对称, 当且仅当由 (2.83a,b) 定义的一阶延拓使得曲面 (3.46) 保持不变.

(3.45) 的解曲线 $y = \Theta(x)$ 满足 $\Theta'(x) = f(x, \Theta(x))$, 因此, 在曲面 (3.46) 上, $y = \Theta(x), y_1 = \Theta'(x)$. 在 (3.47a,b) 的一阶延拓作用下, 曲面 (3.46) 的不变性意思是说, 在群 (3.47a,b) 作用下, (3.45) 的任意解曲线 $y = \Theta(x)$ 映成 (3.45) 的某个解曲线 $y = \phi(x; \varepsilon)$. 而且, 如果变换 (3.47a,b) 将 (3.45) 的每个解曲线 $y = \Theta(x)$ 映成 (3.45) 的解曲线 $y = \phi(x; \varepsilon)$, 那么曲面 (3.46) 在 (3.47a,b) 作用下是不变的, 且 $y_1 = \partial\phi(x; \varepsilon)/\partial x$. 因此直接可知, 解曲线族 (3.45) 在点对称 (3.47a,b) 作用下是不变的, 当且仅当 (3.45) 拥有点对称 (3.47a,b).

下面的定理可以由定义 3.2.4.1、定理 2.6.1.1 关于不变曲面的无穷小准则以及定理 2.4.2.1 关于拓展的无穷小得到.

定理 3.2.4.1 (一阶 ODE 不变性的无穷小准则) 令

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.48}$$

为 Lie 变换群 (3.47a,b) 的无穷小生成元. 令

$$X^{(1)} = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x,y,y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{3.49}$$

是 (3.48) 的一阶延拓的无穷小生成元, 其中, 根据 $\xi(x,y), \eta(x,y)$, 由 (2.101) 确定 $\eta^{(1)}$. 那么一阶 ODE(3.45) 拥有 (3.47a,b), 当且仅当

$$X^{(1)}(y_1 - f(x,y)) = \eta^{(1)} - \xi f_x - \eta f_y = 0, \quad 其中\ y_1 = f(x,y). \tag{3.50}$$

证明留作习题 3.2.10.

显式地, (3.48) 的一阶延拓无穷小为

$$\eta^{(1)} = \eta_x + [\eta_y - \xi_x]y_1 - \xi_y(y_1)^2.$$

因此, 由 (3.50), 一阶 ODE (3.45) 拥有 (3.48) 当且仅当 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 满足

$$\eta_x + [\eta_y - \xi_x]f - \xi_y f^2 - \xi f_x - \eta f_y = 0, \quad \forall x, y. \tag{3.51}$$

方程 (3.51) 为 (3.45) 拥有的无穷小变换 (3.48) 的确定方程. 确定方程 (3.51) 的解产生 ODE(3.45) 的点对称.

容易验证, 对于任意函数 $\xi(x,y)$, 确定方程 (3.51) 的解为

$$\eta(x,y) = \xi(x,y)f(x,y). \tag{3.52}$$

这代表类型 (i) 中平凡的无穷参数 Lie 变换群, 且使得 ODE(3.45) 的每个解曲线保持不变.

对任意 $\xi(x,y)$, 可知

$$\eta(x,y) = \xi(x,y)f(x,y) + \chi(x,y) \tag{3.53}$$

产生 (3.51) 的通解, 其中 $\chi(x,y)$ 是一阶线性 PDE

$$\chi_x + f\chi_y - f_y\chi = 0 \tag{3.54}$$

的通解. 因此, (3.53) 使得 (3.45) 拥有的类型 (ii) 中的无穷参数 Lie 变换群, 且将 (3.45) 的解曲线映成该方程的不同的解曲线 (类型 (ii) 中的无穷参数子群相应于 $\eta=\chi,\xi=0$). 而且, 由 (3.56) 可得, 一阶 ODE (3.45) 拥有

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

当且仅当它拥有

$$Y=[\eta(x,y)-\xi(x,y)f(x,y)]\frac{\partial}{\partial y}.$$

于是可知, 给定一阶 ODE (3.45) 拥有的所有 Lie 变换群 (3.48) 的问题等价于寻找 (3.54) 的通解. 但是, 为了寻找 (3.54) 的通解, 我们必须求解相应的特征系统 $\mathrm{d}x/1=\mathrm{d}y/f=\mathrm{d}\chi/(f_y\chi)$. 因此, 需要知道 ODE(3.45) 的通解. 然而, (3.54) 的任意特解 χ(或等价地, (3.51) 的任意特解且 $\eta\not\equiv\xi f$) 使得 (3.45) 拥有的单参数 Lie 变换群, 从而通过求积分, 根据它的约化, 求得 (3.45) 的通解 (依次, 这导致 (3.45) 拥有的无穷参数 Lie 变换群). 不幸的是, 并不存在一般的程序来发现 (3.45) 的显式的特解 χ.

下面考虑拥有给定单参数 Lie 变换群的所有一阶 ODEs 的确定问题的逆问题.

3.2.5　给定群作用下一阶 ODEs 不变量的确定

我们证明如何发现所有的一阶 ODE

$$y'=f(x,y) \tag{3.55}$$

拥有给定的单参数 Lie 变换群, 且其无穷小生成元为

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.56}$$

这可以通过两种不同的方式实现:

1. 正则坐标法

给定无穷小 (3.56), 计算正则坐标 $r(x,y)$, $s(x,y)$ 满足

$$Xr=0,\quad Xs=1, \tag{3.57}$$

于是对应于 (3.56) 的群变为平移群

$$r^*=r,\quad s^*=s+\varepsilon. \tag{3.58}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{s_x+s_yy'}{r_x+r_yy'} \tag{3.59}$$

关于 y' 和 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}r$. 从而发现拥有 (3.56) 的所有一阶 ODE (3.55) 的问题转化为拥有 (3.58) 的所有一阶 ODEs 的问题

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=F(r,s). \tag{3.60}$$

显然, $F(r,s)$ 并不显式地依赖 s. 因此, 拥有 (3.56) 的最一般的一阶 ODE 具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=G(r), \tag{3.61}$$

其中 G 是 r 的任意函数. 根据给定的坐标 x 和 y , ODE (3.61) 变为 ODE

$$\frac{s_x(x,y)+s_y(x,y)y'}{r_x(x,y)+r_y(x,y)y'}=G(r(x,y)). \tag{3.62}$$

2. (微分) 不变量方法

一阶 ODE (3.55) 拥有 (3.56) 当且仅当 $f(x,y)$ 满足一阶 PDE (3.51). 确定 $f(x,y)$ 的相应的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta(x,y)}=\frac{\mathrm{d}f}{\eta_x+(\eta_y-\xi_x)f-\xi_y f^2}. \tag{3.63}$$

不变量

$$u(x,y)\equiv r(x,y)=\text{const}=c_1 \tag{3.64}$$

是 (3.63) 的第一个方程的求积分. 通过 (3.64) 消去 y, 并且令

$$f_p(x;c_1)=\frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}, \tag{3.65}$$

可知

$$f=f_p \tag{3.66}$$

为 (3.63) 的第二个方程的特解

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=A+Bf+Cf^2, \tag{3.67}$$

且

$$A=A(x;c_1)=\frac{\eta_x}{\xi}, \tag{3.68a}$$

$$B=B(x;c_1)=\frac{\eta_y-\xi_x}{\xi}, \tag{3.68b}$$

$$C=C(x;c_1)=-\frac{\xi_y}{\xi}. \tag{3.68c}$$

方程 (3.67) 是 Riccati 型的一阶 ODE, 且 c_1 为参数. 它的通解可以显式地用变换由 (3.66) 的特解到二阶线性 ODE 确定. 特殊地, 如果 z 解

$$z'' - \left(\frac{C'}{C} + B\right) z' + ACz = 0, \tag{3.69}$$

那么

$$f = -\frac{1}{C}\frac{z'}{z} \tag{3.70}$$

满足 (3.67). 因此, 通过著名的 Riccati 变换 (3.70), (3.69) 的通解可得 (3.67) 的通解. (3.69) 的特解为

$$z = z_p = \mathrm{e}^{-\int C f_p \mathrm{d}x}, \tag{3.71}$$

其中 C 满足 (3.68c), (3.64); f_p 满足 (3.65), (3.64). 通过阶的约化方法 (3.3.3 节中群不变性可推得), (3.69) 的显式的通解可以由 (3.71) 得到. 从而可得 (3.67) 的通解

$$f = \phi(x; c_1, c_2), \tag{3.72}$$

其中 c_2 为积分常数, ϕ 是所含变量的已知函数. 那么, (3.63) 的通解可由方程 $c_2 = \psi(c_1)$ 得到, 其中 ψ 为 c_1 的任意函数.

在 (3.72) 中, 用 y' 和 $u(x, y)$ 分别代替 f 和 c_1, 那么通过解 c_2, 可获得 (3.56) 的一阶延拓的微分不变量 $v(x, y, y') = c_2 = \text{const}$, 即 $X^{(1)}v = 0$. 因此, (3.63) 的通解能够表示为 $v(x, y, f) = \psi(u(x, y))$, 从而, 根据微分不变量,

$$v(x, y, y') = \psi(u(x, y)) \tag{3.73}$$

是拥有 (3.56) 的最一般的一阶 ODE.

注意, 根据正则坐标 $r(x, y)$ 和 $s(x, y)$,

$$v(x, y, y') = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{s_x + s_y y'}{r_x + r_y y'}$$

满足 $X^{(1)}v = 0$, 因为 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}r$ 在 (3.56) 作用下是不变的, 即 $\mathrm{d}s^*/\mathrm{d}r^* = \mathrm{d}s/\mathrm{d}r$. 考虑一些例子, 利用两种途径发现拥有特殊群的一阶 ODEs.

3. *尺度群*

假设一阶 ODE (3.55) 在具有无穷小生成元 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的尺度群

$$x^* = \mathrm{e}^{\varepsilon} x, \tag{3.74a}$$

$$y^* = \mathrm{e}^{\varepsilon} y \tag{3.74b}$$

作用下保持不变.

(1) Lie 变换 (3.74a,b) 的正则坐标为

$$r = \frac{y}{x}, \quad s = \log y.$$

那么

$$s_x = 0, \quad s_y = \frac{1}{y}, \quad r_x = -\frac{y}{x^2}, \quad r_y = \frac{1}{x}.$$

因此, ODE (3.62) 取如下形式

$$\frac{y'}{ry' - r^2} = G(r). \tag{3.75}$$

从 (3.75) 可解得 y', 因此可知拥有尺度群 (3.74a,b) 的最一般的一阶 ODE 为

$$y' = H\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.76}$$

其中 H 是 y/x 的任意函数.

(2) 根据微分不变量方法, 特征方程 (3.63) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}f}{0}. \tag{3.77}$$

(3.77) 的第一个方程求积分为

$$u(x, y) = \frac{y}{x} = \text{const} = c_1.$$

(3.77) 的第二个方程产生

$$f = \text{const} = c_2.$$

那么, 由 $c_2 = \psi(c_1)$ 得 $f(x, y) = \psi(y/x)$, 这又推得 ODE (3.76).

4. *旋转群*

假设一阶 ODE (3.55) 拥有含有无穷小生成元 $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的旋转群

$$x^* = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \tag{3.78a}$$

$$y^* = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon. \tag{3.78b}$$

(1) 正则坐标为极坐标

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad s = \theta = \arcsin\frac{y}{r}.$$

那么 $r_x = x/r, r_y = y/r, s_x = -y/r^2, s_y = x/r^2$. 因此, ODE (3.62) 变为

$$\frac{-y + xy'}{x + yy'} = rG(r).$$

从而, 拥有 (3.78a,b) 的最一般的一阶 ODE 为

$$\frac{-y + xy'}{x + yy'} = H\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right), \tag{3.79}$$

其中 H 是 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的任意函数.

(2) 根据微分不变量方法, 特征方程 (3.63) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}f}{1 + f^2}. \tag{3.80}$$

(3.80) 的第一个方程求积分为

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = c_1. \tag{3.81}$$

(3.80) 的第二个方程产生

$$\frac{\mathrm{d}f}{1 + f^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{c_1^2 - y^2}}. \tag{3.82}$$

令 $\alpha = \arctan f, \beta = \arcsin(y/c_1) = \arctan(y/x)$. 那么 (3.82) 的求积分产生

$$\alpha - \beta = c_2. \tag{3.83}$$

因此, $\tan c_2 = \tan(\alpha - \beta) = \psi(c_1)$ 导出

$$\frac{f - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}f} = \psi(\sqrt{x^2 + y^2}). \tag{3.84}$$

在 (3.84) 中, 通过用 y' 代替 f , 我们又得到 ODE (3.79).

习 题 3.2

1. 令 $y = \phi(x)$ 是一阶线性非齐次 ODE

$$y' + p(x)y = g(x). \tag{3.85}$$

的一个特解.

(a) 利用该解发现 (3.85) 所拥有的单参数 Lie 变换群.

(b) 求相应的正则坐标, 并将 (3.85) 约化为求积分.

(c) 用 ODE：$y'+y=x$ 举例说明.

2. 根据 (3.31a,b) 作用下 (3.30) 的不变性, 发现 ODE(3.30) 的积分因子.

3. 证明：如果 $\mu(x,y)$ 是 ODE(3.20) 的积分因子, 则任意满足 (3.40) 的 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ 定义了 (3.20) 所拥有的单参数 Lie 变换群的无穷小生成元 (3.21a).

4. (a) 刻画使得直线族 $y=\mathrm{const}$ 保持不变的单参数 Lie 变换群的无穷小变换. 显式地发现 $\xi(x,y)\equiv 1$ 时所有那样的群.

(b) 对于直线族 $y/x=\mathrm{const}$, 作同样的考虑.

5. 对固定的常数 k , 发现拥有尺度变换 $x^*=\alpha x, y^*=\alpha^k y(\alpha>0)$ 的所有一阶 ODE.

6. 对于一阶 ODE

$$y'=f(x,y) \tag{3.86}$$

可写为微分形式 $M\mathrm{d}x+N\mathrm{d}y=0$, 引入辅助算子

$$A=N\frac{\partial}{\partial x}-M\frac{\partial}{\partial y},$$

(a) 证明：(3.86) 拥有单参数 Lie 群且无穷小生成元为$X=\xi\dfrac{\partial}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial}{\partial y}$, 当且仅当对于某函数 $\lambda(x,y)$, 交换关系 $[X,A]=\lambda(x,y)A$ 成立.

(b) 如果 $[X,A]=0$, 则可得什么?

(c) 用拥有如下无穷小生成元

(i) $x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(ii) $-y\dfrac{\partial}{\partial x}+x\dfrac{\partial}{\partial y}$

的一阶 ODEs, 举例说明.

7. 如果一阶 ODE：$y'=f(x,y)$ 拥有两个非平凡的群且无穷小生成元

$$X_i=\xi_i\frac{\partial}{\partial x}+\eta_i\frac{\partial}{\partial y},\quad i=1,2,$$

证明：$\psi=\dfrac{\eta_2-f\xi_2}{\eta_1-f\xi_1}$ 恒为常数或 ODE 的首次积分.

8. 发现拥有单参数 Lie 变换群

$$x^*=x+\varepsilon,$$
$$y^*=\frac{xy}{x+\varepsilon}$$

的最一般一阶 ODE.

9. 考虑一阶 ODE

$$\left(y-\frac{3}{2}x-3\right)y'+y=0.$$

(a) 给出该 ODE 所拥有的非平凡 Lie 变换群.

(b) 给出该 ODE 的通解.

10. 证明定理 3.2.4.1.

3.3 点对称作用下二阶和高阶 ODEs 的不变性

现在考虑 Lie 点变换群应用于研究二阶和高阶 ODEs

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \tag{3.87}$$

或等价地, $(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 空间上的一个曲面

$$y_n=f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}),\quad n\geqslant 2,$$

其中我们使用了如下符号

$$y^{(k)}=\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k},\quad k=1,2,\cdots,n;\quad y'=y^{(1)},\quad y''=y^{(2)},$$

注意, (3.87) 的解 $y=\Theta(x)$ 相应于点 $(x,y,y_1,\cdots,y_n)=(x,\Theta(x),\Theta'(x),\cdots,\Theta^{(n)}(x))$.

假设 ODE (3.87) 拥有单参数 Lie 点变换群

$$x^*=X(x,y;\varepsilon)=x+\varepsilon\xi(x,y)+O(\varepsilon^2), \tag{3.88a}$$

$$y^*=Y(x,y;\varepsilon)=y+\varepsilon\eta(x,y)+O(\varepsilon^2), \tag{3.88b}$$

它的无穷小生成元为

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.88c}$$

定义 3.3.1 n 阶 ODE (3.87) 的点对称是 (3.87) 拥有的单参数 Lie 点变换群 (3.88a~c).

我们将要证明, 在点对称 (3.88a,b) 作用下, n 阶 ODE(3.87) 的不变性可以构造性地将 (3.87) 约化为 $n-1$ 阶 ODE 加上一个求积分. 通过两种方式来实现这种约化:

(1) 正则坐标作用下阶的约化;

(2) 微分不变量作用下阶的约化.

3.4 节将要证明, 微分不变量的阶的约化是假设拥有多参数 Lie 点变换群的 n 阶 ODE 的约化.

我们将要证明如何发现给定 n 阶 ODE 拥有的点对称. 对于给定的一阶 ODE, 我们知道其拥有的无穷小 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 满足单个的线性 PDE, 如果不知道 ODE 本身的通解, 那么它的通解也不能得到. 从而, 我们不能够系统地确定所有那样的对称. 但是, 当 $n\geqslant 2$ 时, Lie 点变换群的无穷小满足超定的连性确定方程组, 其仅仅含有有限个数的线性无关的解. 事实上, 如果 $n\geqslant 2$, 那么通常可以显式地计算 n 阶 ODE 拥有的 Lie 点变换群.

我们也要考虑寻找拥有给定单参数 Lie 点变换群的所有 n 阶 ODEs 的问题.

3.3.1 通过正则坐标实现阶的约化

基本结论总结为如下定理:

定理 3.3.1.1 假设 n 阶 $(n\geqslant 2)$ODE(3.87) 拥有具有无穷小生成元 (3.88c) 的非平凡单参数 Lie 变换群 (3.88a,b), 令 $r(x,y),s(x,y)$ 为相应正则坐标, 且满足 $Xr=0, Xs=1$. 那么, n 阶 ODE(3.87) 约化为 $n-1$ 阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}z}{\mathrm{d}r^{n-1}}=G\left(r,z,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-2}z}{\mathrm{d}r^{n-2}}\right), \tag{3.89}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=z. \tag{3.90}$$

证明 根据正则坐标 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{s_x+s_yy'}{r_x+r_yy'}. \tag{3.91}$$

为了保证 (3.91) 是非奇异的, 假设 $r_x+r_yy'\neq 0$, 因此, 由 $Xr=\xi r_x+\eta r_y=0$ 可知, 对 (3.87) 的解曲线 $y=\Theta(x)$ 有 $\eta/\xi\neq y'=\Theta'(x)$. 从而, 群 (3.88a,b) 作用在 ODE(3.87) 的解曲线的邻域中, 在群 (3.88a,b) 作用下, 该邻域中 (3.87) 的每个解曲线被映射为 (3.87) 的不同解曲线.

由 (3.91) 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}r^2}=\left(\frac{1}{r_x+r_yy'}\right)\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{s_x+s_yy'}{r_x+r_yy'}\right)}{\mathrm{d}x}=y''f_1\left(r,s,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)+g_1\left(r,s,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right), \tag{3.92}$$

这里

$$\begin{aligned}
f_1\left(r,s,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)&=\frac{s_yr_x-s_xr_y}{(r_x+r_yy')^3},\\
g_1\left(r,s,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)&=\frac{1}{(r_x+r_yy')^3}[(y')^3(r_ys_{yy}-s_yr_{yy})\\
&\quad+(y')^2(2r_ys_{xy}+r_xs_{yy}-2s_yr_{xy}-s_xr_{yy})\\
&\quad+y'(2r_xs_{xy}+r_ys_{xx}-2s_xr_{xy}-s_yr_{xx})+(r_xs_{xx}-s_xr_{xx})].
\end{aligned}$$

关于 y' 解 (3.91) 得

$$y' = \frac{s_x - r_x \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}}{r_y \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} - s_y}. \tag{3.93}$$

因此, 将 (3.93) 代入 (3.92), 并且用 r 和 s 分别代替 x 和 y , 有

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}r^2} F_1\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right) + G_1\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right), \tag{3.94}$$

且 $F_1 = 1/f_1, G_1 = -g_1/f_1$. 注意, 因为 r 和 s 是正则坐标, 因此可知 $s_y r_x - s_x r_y \neq 0$, 从而 $f_1 \neq 0$. 依次类推, 可以证明对于某个函数

$$g_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}s}{\mathrm{d}r^{k-1}}\right),$$

有

$$\frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k} = y^{(k)} f_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right) + g_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}s}{\mathrm{d}r^{k-1}}\right), \tag{3.95}$$

且

$$f_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{s_y r_x - s_x r_y}{(r_x + r_y y')^{k+1}}, \quad k \geqslant 2.$$

因此

$$y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k} F_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right) + G_{k-1}\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}s}{\mathrm{d}r^{k-1}}\right), \tag{3.96}$$

其中

$$F_{k-1} = \frac{1}{f_{k-1}}, \quad G_{k-1} = -\frac{g_{k-1}}{f_{k-1}}, \quad k \geqslant 2.$$

注意 $f_{k-1} \neq 0$ 且 $F_{k-1} = 1/f_{k-1} \neq 0 (k \geqslant 2)$.

因而, 根据正则坐标 $(r(x,y), s(x,y))$ 可知, 对于某个函数 $F(r, s, \mathrm{d}s/\mathrm{d}r, \cdots, \mathrm{d}^{n-1}s/\mathrm{d}r^{n-1})$, n 阶 ODE (3.87) 可以写为可解形式的 n 阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}r^n} = F\left(r, s, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}r^{n-1}}\right), \tag{3.97}$$

但是, ODE (3.97) 拥有平移群

$$r^* = r, \tag{3.98a}$$

$$s^* = s + \varepsilon. \tag{3.98b}$$

因此, $F(r, s, \mathrm{d}s/\mathrm{d}r, \cdots, \mathrm{d}^{n-1}s/\mathrm{d}r^{n-1})$ 与 s 无关. 从而, ODE (3.87) 可以约化为 (3.89) 和 (3.90). □

注意, 如果

$$z = \phi(r; C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})$$

为 ODE (3.89) 的通解, 那么 ODE (3.87) 的通解为

$$s(x,y) = \int^{r(x,y)} \phi(\rho; C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}) \mathrm{d}\rho + C_n,$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是 n 个基本积分常数. 因此, 单参数 Lie 点变换群作用下的 n 阶 ODE (3.87) 的不变性构造性地将 (3.87) 约化为 $n-1$ 阶 ODE 加上求积分.

3.3.2 通过微分不变量实现阶的约化

用曲面

$$F(x, y, y_1, \cdots, y_n) = y_n - f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = 0 \tag{3.99}$$

表示的 n 阶 ODE (3.87) 拥有群 (3.88a,b) 当且仅当曲面 (3.99) 是不变的, 即

$$X^{(n)} F = 0, \quad \text{当 } F = 0 \text{ 时},$$

其中 $X^{(n)}$ 为无穷小生成元 X 的 n 阶延拓 (参看 2.4.2 节). 从而可知, $F(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 是群的不变量

$$u(x,y), v_1(x,y,y_1), \cdots, v_n(x, y, y_1, \cdots, y_n) \tag{3.100}$$

的某个函数, 其中

$$Xu(x,y) = 0, \quad X^{(k)} v_k(x, y, y_1, \cdots, y_k) = 0, \quad \text{其中 } \frac{\partial v_k}{\partial y_k} \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n.$$

明显地, 对于群 (3.88a,b) 的 n 阶延拓, 有 $u^* = u, v_k^* = v_k, k = 1, 2, \cdots, n$. 因此, $v_k(x, y, y_1, \cdots, y_k)$ 为特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\eta^{(1)}(x,y,y_1)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_k}{\eta^{(k)}(x, y, y_1, \cdots, y_k)}$$

的积分常数, 其中 $\eta^{(k)}$ 由 (2.100a,b) 确定, $k = 1, 2, \cdots, n$.

对于任意不变量集 (3.100) 和某个函数 $G(u, v_1, v_2, \cdots, v_n)$, ODE (3.99) 变为

$$G(u, v_1, v_2, \cdots, v_n) = 0, \tag{3.101}$$

现在证明, 不需要计算正则坐标 $s(x,y)$, 总可以选择不变量 (3.100), 使得 (3.101) 是 $n-1$ 阶 ODE. 而且, 我们可以利用这样方式实现它, 即 n 阶 ODE (3.99) 约化为 $n-1$ 阶 ODE 加上求积分 (根据正则坐标 $(r(x,y), s(x,y))$, 同样的约化也成立, 其中 $u(x,y) = r(x,y)$ 且 $v_k(x, y, y_1, \cdots, y_k) = \mathrm{d}^k s / \mathrm{d}r^k, k = 1, 2, \cdots, n$).

在 3.2.5 节中, 我们证明如何寻找对应于无穷小生成元 (3.88c) 的一阶延拓 $X^{(1)}$ 的显式不变量 $u(x,y)$ 和 $v_1(x,y,y_1)=v(x,y,y_1)$. 这些不变量源于特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{\eta(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y_1-\xi_y(y_1)^2} \tag{3.102}$$

的积分常数. 如果能够显式地确定 $u(x,y)$, 那么计算 $v(x,y,y_1)$ 将约化为求积分.

因为 $u(x,y)$ 和 $v(x,y,y_1)$ 是 (3.88a,b) 的 k 阶延拓群作用下的不变量, 因此可知 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u$ 是 (3.88a,b) 的 $k+1$ 阶延拓群作用下的群不变量, 因为

$$(\mathrm{d}v/\mathrm{d}u)^*=\mathrm{d}v^*/\mathrm{d}u^*=\mathrm{d}v/\mathrm{d}u,\quad k\geqslant 1.$$

继续归纳可知 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u,\mathrm{d}^2v/\mathrm{d}u^2,\cdots,\mathrm{d}^{n-1}v/\mathrm{d}u^{n-1}$ 为 (3.88a,b) 的 n 阶延拓群的不变量. 这样的不变量称为 (3.88a,b) 的 n 阶延拓群的微分不变量. 而且, 对任意选择的 (3.88a,b) 的一阶延拓群的不变量 $u(x,y)$ 和 $v(x,y,y_1)$, 这样的微分不变量能够被构造出, 且 $\mathrm{d}v/\partial y_1\neq 0$.

因此, 对于某个函数 $g_1(x,y,y_1)$, 有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}+y_1\dfrac{\partial v}{\partial y}+y_2\dfrac{\partial v}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}+y_1\dfrac{\partial u}{\partial y}}=v_2(x,y,y_1,y_2)=y_2\left[\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y_1}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}+y_1\dfrac{\partial u}{\partial y}}\right]+g_1(x,y,y_1),$$

依次归纳, 对于某个函数 $g_k(x,y,y_1,\cdots,y_k),k=1,2,\cdots,n-1$. 可以证明

$$\frac{\mathrm{d}^kv}{\mathrm{d}u^k}=v_{k+1}(x,y,y_1,\cdots,y_{k+1})=y_{k+1}\left[\frac{\dfrac{\partial v}{\partial y_1}}{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+y_1\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^k}\right]+g_k(x,y,y_1,\cdots,y_k),$$

从而, 不变量 $v_k(x,y,y_1,\cdots,y_k),k=2,3,\cdots,n$ 被构造为微分不变量. 而且, 应该注意

$$y_{k+1}=\frac{\mathrm{d}^kv}{\mathrm{d}u^k}A_k(x,y,y_1)+B_k(x,y,y_1,\cdots,y_k),$$

其中

$$A_k(x,y,y_1)=\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+y_1\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^k}{\dfrac{\partial v}{\partial y_1}},$$

注意 $A_k\neq 0$ 且 $1/A_k\neq 0$, $k=1,2,\cdots,n-1$.

从而, 根据微分不变量, 对于 H 关于 $u, v, \mathrm{d}v/\mathrm{d}u, \cdots, \mathrm{d}^{n-2}v/\mathrm{d}u^{n-2}$ 的某个函数, 方程 (3.101) 可构造性地约化为 $n-1$ 阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}v}{\mathrm{d}u^{n-1}} = H\left(u, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-2}v}{\mathrm{d}u^{n-2}}\right), \tag{3.103}$$

而且, 如果

$$v = \phi(u; C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})$$

是 (3.103) 的通解, 其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ 为任意常数, 那么 n 阶 ODE (3.99) 的通解可通过求解一阶 ODE

$$v(x, y, y') = \phi(u(x, y); C_1, C_2, \cdots, C_{n-1})$$

得到, 其约化为求积分, 因为它拥有群 (3.88a,b).

3.3.3　阶的约化举例

1. 二阶齐次线性方程 (尺度作用下的不变性)

考虑二阶齐次线性 ODE

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

或等价地,

$$y_2 + p(x)y_1 + q(x)y = 0. \tag{3.104}$$

ODE (3.104) 拥有单参数 (α)Lie 点变换群

$$x^* = x, \tag{3.105a}$$

$$y^* = \alpha y. \tag{3.105b}$$

(1) 通过正则坐标实现阶的约化. 相应于 (3.105a) 的正则坐标为

$$r(x, y) = x, \quad s(x, y) = \log y.$$

那么

$$z = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{y'}{y}, \tag{3.106}$$

使得

$$y' = yz.$$

从而

$$y'' = y'z + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = yz^2 + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}.$$

因此, 二阶 ODE (3.104) 约化为 Riccati 类型的一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}+z^2+p(r)z+q(r)=0. \tag{3.107}$$

注意 (3.106) 是有关 (3.107) 和 (3.104) 的 Riccati 变换.

(2) 通过微分不变量实现阶的约化. 可知 (3.105a,b) 的一阶延拓的不变量为

$$u(x,y)=x,\quad v(x,y,y_1)=\frac{y_1}{y}.$$

相应的微分不变量为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{y_2}{y}-\left(\frac{y_1}{y}\right)^2=\frac{y_2}{y}-v^2.$$

因此

$$y_2=y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+yv^2.$$

从而, 二阶 ODE (3.104) 又约化为 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}+v^2+p(u)v+q(u)=0. \tag{3.108}$$

如果

$$v=\phi(u;C_1) \tag{3.109}$$

是 ODE (3.108) 的通解, 那么由 3.3.2 节可推得一阶 ODE

$$v(x,y,y')=\frac{y'}{y}=\phi(x;C_1)$$

拥有群 (3.105a,b). 这使得该一阶 ODE 约化为求积分. 特别地,

$$y=C_2\mathrm{e}^{\int\phi(x;C_1)\mathrm{d}x}.$$

2. 二阶齐次线性方程 (利用给定特解实现阶的约化)

假设 $y=\Theta(x)$ 是二阶 ODE (3.104) 的特解. 那么 (3.104) 拥有单参数 (ε)Lie 点变换群

$$x^*=x, \tag{3.110a}$$

$$y^*=y+\varepsilon\Theta(x). \tag{3.110b}$$

(1) 通过正则坐标实现阶的约化. 对应于 (3.110a) 的正则坐标为

$$r(x,y)=x,\quad s(x,y)=\frac{y}{\Theta(x)}.$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{y'}{\Theta(x)} - \frac{y\Theta'(x)}{\Theta^2(x)},$$

使得

$$y' = \Theta(r)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} + s\Theta'(r).$$

从而

$$y'' = 2\Theta'(r)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} + \Theta(r)\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}r^2} + \Theta''(r)s.$$

令 $z = \mathrm{d}s/\mathrm{d}r$. 那么, (3.104) 约化为一阶线性 ODE

$$\Theta(r)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} + [2\Theta'(r) + p(r)\Theta(r)]z = 0.$$

(2) 通过微分不变量实现阶的约化. 明显地, $u(x,y) = x$ 是群 (3.110a,b) 的不变量. (3.110a,b) 的一阶延拓 $[\xi(x,y) = 0, \eta(x,y) = \Theta(x)]$ 的不变量 $v(x,y,y_1)$ 为相应特征方程 (3.102) 的积分常数, 这里的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0} = \frac{\mathrm{d}y}{\Theta(x)} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\Theta'(x)}.$$

因此

$$v(x,y,y_1) = y_1 - y\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = y_1 - y\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = y_2 - y_1\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + y\left[\left(\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right)^2 - \frac{\Theta''(u)}{\Theta(u)}\right].$$

从而

$$y_1 = y\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + v, \quad y_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + v\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + y\frac{\Theta''(u)}{\Theta(u)}.$$

因此, ODE (3.104) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + \left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + p(u)\right]v = 0. \tag{3.111}$$

如果

$$v = \phi(u; C_1) \tag{3.112}$$

是 ODE (3.111) 的通解, 则一阶 ODE

$$v(x,y,y') = y' - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}y = \phi(x; C_1)$$

拥有群 (3.110a,b), 从而可以约化为求积分 (参看 3.2.1 节例 2)

3. Blasius 方程

产生于平坦金属板中 Prandtl-Blasius 问题的 Blasius 方程 (参看 1.3.1 节) 具有如下形式

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0,$$

或等价于曲面

$$y_3 + \frac{1}{2}yy_2 = 0. \tag{3.113}$$

易知, 三阶 ODE (3.113) 拥有两参数 (α, β)Lie 点变换群

$$x^* = \frac{1}{\alpha}x + \beta, \tag{3.114a}$$

$$y^* = \alpha y. \tag{3.114b}$$

利用微分不变量, 我们分别考虑参数 α 和 β, 把 (3.114a,b) 当作两个单参数群, 约化 Blasius 方程 (3.113) 为两个不同的二阶 ODEs. 利用正则坐标的约化留作习题 3.3.2. 在 3.4.2 节中, 我们将证明, 从群 (3.114a,b) 作用下不变性的角度如何直接将 (3.113) 约化为一阶 ODE 和两个求积分.

(1) 从尺度作用下不变性的角度实现 ODE(3.113) 的约化. 显然, $x^* = (1/\alpha)x$, $y^* = \alpha y$ 的一阶延拓的不变量为

$$u(x, y) = xy, \quad v(x, y, y_1) = \frac{y_1}{y^2}.$$

因而

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y + xy_1 = y[1 + uv].$$

从而

$$y_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 v) = 2yy_1 v + y^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y^3\left[2v^2 + (1 + uv)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right]$$

和

$$\begin{aligned} y_3 &= 3y^2 y_1\left[2v^2 + (1 + uv)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right] + y^3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[2v^2 + (1 + uv)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right]\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\ &= y^4\left[(1 + uv)^2\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} + u(1 + uv)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 + 8v(1 + uv)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + 6v^3\right]. \end{aligned}$$

因此, ODE (3.113) 约化为二阶 ODE

$$(1 + uv)^2\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}u^2} + u(1 + uv)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \left(8v + \frac{1}{2}\right)(1 + uv)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + 6v^3 + v^2 = 0 \tag{3.115}$$

和求积分. 特别地, 如果

$$v = \phi(u; C_1, C_2) \tag{3.116}$$

是 ODE (3.115) 的通解, 那么一阶 ODE

$$v = \frac{y'}{y^2} = \phi(xy; C_1, C_2) \tag{3.117}$$

拥有 $x^* = (1/\alpha)x, y^* = \alpha y$. 根据正则坐标 $s = \log y$ 和 $r = xy$, ODE (3.117) 变为 ODE

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\phi(r; C_1, C_2)}{r\phi(r; C_1, C_2) + 1}.$$

因此, 我们得到 Blasius 方程的通解

$$y = C_3 \exp\left[\int^{xy} \frac{\phi(r; C_1, C_2)}{r\phi(r; C_1, C_2) + 1}\mathrm{d}r\right],$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

注意, 二阶 ODE (3.115) 并不拥有任意明显的单参数 Lie 点变换群. 特别地, 具有参数 β 的群 (即 $x^* = x + \beta, y^* = y$) 并不能导致 (3.115) 拥有的点变换群. 将在 3.4 节中对其进行说明.

(2) 从平移作用下不变性的角度实现 ODE(3.113) 的约化. 显然, $x^* = x+\beta, y^* = y$ 的一阶延拓的不变量为

$$u(x, y) = y, \quad v(x, y, y_1) = y_1.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = y_1 = v.$$

因此

$$y_2 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \quad y_3 = v^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} + v\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2.$$

所以, ODE (3.113) 约化为

$$v\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} + \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \frac{1}{2}u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 0 \tag{3.118}$$

和一个求积分. 特别地, 如果

$$v = \psi(u; C_1, C_2) \tag{3.119}$$

是 ODE (3.118) 的通解, 那么一阶 ODE

$$v = y' = \psi(y; C_1, C_2) \tag{3.120}$$

拥有 $x^* = x + \varepsilon, y^* = y$. 从而, Blasius 方程的通解为

$$\int^y \frac{\mathrm{d}z}{\psi(z; C_1, C_2)} = x + C_3,$$

其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数.

注意, 二阶 ODE (3.118) 拥有明显的单参数 (α)Lie 尺度群 $u^* = \alpha u, v^* = \alpha^2 v$. 该群是由 $y^* = \alpha y, x^* = (1/\alpha)x$ 作用下 Blasius 方程的不变性导致的. 因此, (3.118) 可以约化为一阶 ODE. 在 3.4 节中, 我们要解释为什么这是可能的.

3.3.4 n 阶 ODE 的点变换的确定方程

考虑单参数 Lie 点变换群

$$x^* = X(x, y; \varepsilon), \tag{3.121a}$$

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon). \tag{3.121b}$$

定义 3.3.4.1 Lie 点变换群 (3.121a,b) 使得 n 阶 ODE (3.87) 保持不变, 即它是 ODE (3.87) 拥有的点变换, 当且仅当它的由 (2.89a~d) $(k = n)$ 确定的 n 阶延拓使得曲面 (3.99) 保持不变.

ODE (3.87) 的解曲线 $y = \Theta(x)$ 满足 $\Theta^{(n)}(x) = f(x, \Theta(x), \Theta'(x), \cdots, \Theta^{(n-1)}(x))$, 因而位于曲面 (3.99) 上且 $y = \Theta(x), y_k = \Theta^{(k)}(x), k = 1, 2, \cdots, n$. 群 (3.121a,b) 的 n 阶延拓作用下曲面 (3.99) 的不变性是指在群 (3.121a,b) 作用下, ODE(3.87) 的任意解曲线映成 ODE (3.87) 的某个解曲线 $y = \phi(x; \varepsilon)$. 而且, 如果变换群 (3.121a,b) 将 ODE(3.87) 的每个解曲线 $y = \Theta(x)$ 映成它的解曲线 $y = \phi(x; \varepsilon)$, 那么曲面 (3.99) 在 (3.121a,b) 作用下是不变的, 且 $y_k = \partial^k \phi(x; \varepsilon)/\partial x^k, k = 1, 2, \cdots, n$. 立即可得, ODE(3.87) 的所有解曲线族在群 (3.121a,b) 作用下保持不变, 当且仅当 ODE(3.87) 拥有群 (3.121a,b).

由定义 3.3.4.1, 关于不变曲面的无穷小准则的定理 2.6.1.1 以及关于拓展的无穷小定理 2.4.2.1, 可以得到如下定理:

定理 3.3.4.1 (n 阶 ODE 的不变性的无穷小准则) 令

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.122}$$

为单参数 Lie 点变换 (3.121a,b) 的无穷小生成元. 令

$$X^{(n)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \eta^{(n)}(x, y, y_1, \cdots, y_n)\frac{\partial}{\partial y_n} \tag{3.123}$$

是 (3.122) 的 n 阶延拓的无穷小生成元, 其中 $\xi(x, y), \eta(x, y), \eta^{(k)}(x, y, y_1, \cdots, y_k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 由 (2.100a,b) 确定. 那么, (3.121a,b) 是 n 阶 ODE (3.87) 拥有的点对称, 当且仅当

$$X^{(n)}(y_n - f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})) = 0, \quad 当\ y_n = f\ 时,$$

或等价地

$$\eta^{(n)}\Big|_{y_n=f}=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots+\eta^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}, \tag{3.124}$$

其中

$$\eta^{(k)}=D^k\eta-\sum_{j=0}^{k-1}\frac{k!}{(k-j-1)!(j+1)!}y_{k-j}D^{j+1}\xi,\quad k=1,2,\cdots,n.$$

证明留作习题 3.3.9.

更一般地, ODE $F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=0$ 拥有具有无穷小生成元 (3.122) 的群 (3.121a,b), 当且仅当 $F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=0$ 时, $X^{(n)}F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=0$.

如果 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 是 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的多项式, 那么由定理 2.4.2.2(用 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 替代 y_n) 可知, 方程 (3.124) 是 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的多项式, 它的系数关于 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 以及它们的直到 n 阶的偏导数是线性齐次的. 因为对任意 n 阶 ODE (3.87), 在任意固定的 $y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的值, 我们可以赋予任意的值, 因此可得 (3.124) 的每个单项式的系数必须为零, 因为这个多项式方程对任意值 $x,y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 一定成立. 这导致关于 $\xi(x,y),\eta(x,y)$ 的线性齐次 PDEs 组. 这个线性系统定义了 n 阶 ODE (3.87) 拥有的点对称的确定方程组. 如果, 那么这个系统是超定的, 因为确定方程的个数大于 2, 即大于未知量的数目.

一般地, 如果 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 不是关于 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的多项式, 那么, 基于变量 $x,y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的无关性, (3.124) 还可以分成确定方程的超定系统.

可以证明, 二阶 ODE 至多拥有一个 8 参数 Lie 点变换群, 以及 n 阶 ODE($n>2$) 至多拥有 $(n+4)$ 参数 Lie 点变换群 (Lie, 1893; Dickson, 1924; Ovsiannikov, 1982).

现在表述 ODEs 拥有的无穷小生成元形式的一些定理. 这些定理覆盖了很多有关 ODEs 的关于设定和求解无穷小 $\xi(x,y)$,$\eta(x,y)$ 的确定方程的计算问题, 特别地, 这些定理是关于 $\xi(x,y)$,$\eta(x,y)$ 依赖 y 的情况 .

定理 3.3.4.2 考虑如下形式的 n 阶 $(n\geqslant 3)$ODE

$$y^{(n)}=g(x,y,y')y^{(n-1)}+h(x,y,y',\cdots,y^{(n-2)}). \tag{3.125}$$

如果 ODE (3.125) 拥有无穷小生成元 (3.122), 那么 $\xi_y=0$.

定理 3.3.4.3 考虑如下形式的 n 阶 ODE

$$y^{(n)}=g(x,y)y^{(n-1)}+h(x,y,y',\cdots,y^{(n-2)}). \tag{3.126}$$

如果 ODE (3.126) 拥有无穷小生成元 (3.122), 那么 $\xi_y=0,\eta_{yy}=0$.

定理 3.3.4.4　考虑如下形式的二阶 ODE

$$y'' = g(x,y)y' + h(x,y). \tag{3.127}$$

如果 ODE (3.127) 拥有无穷小生成元 (3.122) 且 $\xi_y = 0$, 那么 $\eta_{yy} = 0$.

关于定理 3.3.4.2 ~ 定理 3.3.4.4 的证明, 参看文献 (Bluman, 1990a).

考虑两个例子:

(1) 作用在 R^2 上的 Lie 变换群将直线映成直线.

二阶 ODE

$$y'' = 0 \tag{3.128}$$

拥有的 Lie 点变换群. 这里不变性准则为

$$\eta^{(2)} = 0, \quad y_2 = 0,$$

其中 $\eta^{(2)}$ 由 (2.102) 确定, 即 $(\xi(x,y), \eta(x,y))$ 满足

$$\eta_{xx} + [2\eta_{xy} - \xi_{xx}]y_1 + [\eta_{yy} - 2\xi_y](y_1)^2 - \xi_{yy}(y_1)^3 = 0. \tag{3.129}$$

方程 (3.129) 是 y_1 的三次多项式. 令 (3.129) 中每个单项式的系数为零, 得确定方程组

$$\xi_{yy} = 0, \tag{3.130a}$$

$$\eta_{xx} = 0, \tag{3.130b}$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \tag{3.130c}$$

$$\xi_{xx} - 2\eta_{xy} = 0. \tag{3.130d}$$

由 (3.130a,b) 得

$$\xi = a(x)y + b(x),$$

$$\eta = c(y)x + d(y).$$

因此, (3.130c,d) 使得

$$c''(y)x + d''(y) - 2a'(x) = 0, \tag{3.131a}$$

$$a''(x)y + b''(x) - 2c'(y) = 0. \tag{3.131b}$$

取 (3.131a) 的 $\partial/\partial x$ 和 (3.131b) 的 $\partial/\partial y$ 可知, $c''(y) = a''(x) = 0$. 因而, 确定方程 (3.130a~d) 的解为

$$\xi = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 x + \alpha_4 y + \alpha_5,$$

$$\eta = \alpha_1 xy + \alpha_2 y^2 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_8$ 为任意常数. 这是 ODE(3.125) 拥有的 8 参数 Lie 射影变换群 (2.168a,b).

(2) Blasius 方程

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0 \tag{3.132}$$

的不变性准则为

$$\eta^{(3)} + \frac{1}{2}y_2\eta + \frac{1}{2}y\eta^{(2)} = 0, \quad 当\ y_3 = -\frac{1}{2}yy_2, \tag{3.133}$$

其中 $\eta^{(2)}, \eta^{(3)}$ 由 (2.102), (2.103) 确定. 那么 (3.133) 变为多项式方程

$$\begin{aligned}
&\left[\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx}\right] + \left[3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx}\right]y_1 \\
&+ \left[3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} - y\xi_{xy}\right](y_1)^2 \\
&- \left[\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy} - \frac{1}{2}y\xi_{yy}\right](y_1)^3 - \xi_{yyy}(y_1)^4 + \left[3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta\right]y_2 \\
&+ \left[3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} + \frac{1}{2}y\xi_y\right]y_1y_2 - 6\xi_{yy}(y_1)^2y_2 - 3\xi_y(y_2)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.134}$$

关于 $\xi(x,y)$ 和 $\eta(x,y)$ 的确定方程为

$$\eta_{xxx} + \frac{1}{2}y\eta_{xx} = 0, \tag{3.135a}$$

$$3\eta_{xxy} - \xi_{xxx} + y\eta_{xy} - \frac{1}{2}y\xi_{xx} = 0, \tag{3.135b}$$

$$3\eta_{xyy} - 3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\eta_{yy} - y\xi_{xy} = 0, \tag{3.135c}$$

$$3\xi_{xxy} + \frac{1}{2}y\xi_{yy} - \eta_{yyy} = 0, \tag{3.135d}$$

$$\xi_{yyy} = 0, \tag{3.135e}$$

$$3\eta_{xy} - 3\xi_{xx} + \frac{1}{2}y\xi_x + \frac{1}{2}\eta = 0, \tag{3.135f}$$

$$3\eta_{yy} - 9\xi_{xy} + \frac{1}{2}y\xi_y = 0, \tag{3.135g}$$

$$\xi_{yy} = 0, \tag{3.135h}$$

$$\xi_y = 0. \tag{3.135i}$$

由 (3.135i) 立即可得 $\xi = \xi(x)$, 因而 (3.135h,e) 是多余的. 进而 (3.135g) 导致

$$\eta_{yy} = 0, \tag{3.136}$$

使得 (3.135c,d) 也成立. 取 (3.135b) 的 $\partial/\partial y$ 和 (3.135f) 的 $\partial^2/\partial x\partial y$, 得到

$$\eta_{xy} = \xi''(x) = 0. \tag{3.137}$$

而且, 现在 (3.135b) 也满足. 那么

$$\xi = \alpha + \beta x, \tag{3.138a}$$

$$\eta = \gamma y + a(x). \tag{3.138b}$$

方程 (3.135f) 使得 $a(x) = 0, \gamma = -\beta$. (3.135a) 并不产生额外的约束. 从而, Blasius 方程 (3.132) 仅仅拥有具有无穷小

$$\xi = \alpha + \beta x, \tag{3.139a}$$

$$\eta = -\beta y \tag{3.139b}$$

的 2 参数 Lie 点变换 (平移、尺度) 群, 其中 α 和 β 是常数.

如果直接用定理 3.3.4.3, 那么, 求解 $(\xi(x,y)\ ,\eta(x,y))$ 的计算有意义地被简化. 因为 ODE(3.132) 具有形式 (3.126), 立即可知 $\xi_y = 0, \eta_{yy} = 0$. 因此, 多项式方程 (3.134) 对应的确定方程仅仅约化为 (3.135a,b,f).

3.3.5 给定群作用下 n 阶 ODEs 的不变量的确定

现在考虑拥有给定单参数 Lie 点变换群的所有 n 阶 ODEs 问题. 通过用正则坐标或微分不变量, 这个问题可以用 3.2.4 节中一阶 ODE 的程序的简单的拓展来实现.

假设 n 阶 ODE (3.121) 拥有给定的具有无穷小生成元 (3.122) 的单参数 Lie 点变换群. 我们可以用两种明显的方式进行:

(1) 正则坐标法. 对应于无穷小生成元 (3.122), 计算满足 $Xr = 0, Xs = 1$ 的正则坐标 $(r(x,y), s(x,y))$, 使得 ODE (3.121) 拥有的群是平移群

$$r^* = r, \quad s^* = s + \varepsilon. \tag{3.140}$$

因而, (3.140) 作用下的不变量为

$$\frac{\mathrm{d}^k s}{\mathrm{d}r^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

通过关系 (3.91) 和 (3.95), 这些不变量可以用 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 来表示. 从而, 拥有具有无穷小生成元 (3.122) 的单参数 Lie 点变换群, 具有可解形式的最一般的 n 阶 ODE 为

$$\frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}r^n} = G\left(r, \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}s}{\mathrm{d}r^{n-1}}\right), \tag{3.141}$$

其中 G 为 $r, \mathrm{d}s/\mathrm{d}r, \cdots, \mathrm{d}^{n-1}s/\mathrm{d}r^{n-1}$ 的任意函数. 注意, ODE (3.141) 是变量 $z = \mathrm{d}s/\mathrm{d}r$ 的 $n-1$ 阶 ODE.

(2) 微分不变量法. 正如一阶 ODEs, 首先求不变量 $u(x, y)$ 和 $v(x, y, y')$. 因此, 计算微分不变量

$$\frac{\mathrm{d}^k v}{\mathrm{d}u^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

可以用 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 表示, 这类似于 3.3.2 节. 从而, 拥有群 (3.122) 且具有可解形式的最一般的 n 阶 ODE 为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}v}{\mathrm{d}u^{n-1}} = H\left(u, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-2}v}{\mathrm{d}u^{n-1}}\right), \tag{3.142}$$

其中 H 为 $u, v, \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \cdots, \dfrac{\mathrm{d}^{n-2}v}{\mathrm{d}u^{n-1}}$ 的任意函数. 注意, ODE (3.142) 是变量 v 的 $n-1$ 阶 ODE.

为了寻找拥有简单形式的群 (如尺度群) 的最一般的 n 阶 ODE, 很自然地是直接计算 $n+1$ 个不变量, 分别依赖 $(x, y), (x, y, y'), \cdots, (x, y, y', \cdots, y^{(n)})$. 直接计算方法的缺点是从 n 到 $n-1$ 阶的约化不是自动的, 正像利用正则坐标或微分不变量获得最一般的 n 阶 ODE 一样.

作为例子, 用这些方法寻找拥有尺度群 (3.74a,b) 的最一般的二阶 ODE. 读者可参考 3.2.4 节中的计算, 那里我们发现拥有 (3.74a,b) 的最一般的一阶 ODE.

(1) 正则坐标法. 正则坐标为

$$r = \frac{y}{x}, \quad s = \log y.$$

因而

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{y'}{ry' - r^2}, \\
&\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}r^2} = -\frac{r^2 yy''}{(ry' - r^2)^3} + \frac{2ry' - (y')^2}{(ry' - r^2)^2} = -\frac{r^2 yy''}{(ry' - r^2)^3} + \frac{2ry'}{(ry' - r^2)^2} - \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}\right)^2.
\end{aligned}$$

从而, 拥有尺度群 (3.74a,b) 的最一般的二阶 ODE 为

$$y'' = 2\frac{y'(xy' - y)}{xy} + \frac{(xy' - y)^3}{x^4} G\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2 y'}{xyy' - y^2}\right), \tag{3.143}$$

其中 G 为所含变量的任意函数.

(2) 微分不变量法. 由拥有 (3.74a,b) 的最一般的一阶 ODE(3.76) 可知

$$u=\frac{y}{x},\quad v=y'.$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{x^2y''}{xy'-y}.$$

从而, 拥有 (3.74a,b) 的最一般的二阶 ODE 为

$$y''=\frac{xy'-y}{x^2}H\left(\frac{y}{x},y'\right),\tag{3.144}$$

其中 H 为任意函数. 当然, (3.143) 和 (3.144) 一定产生同样的一般二阶 ODE. 比较 (3.143) 和 (3.144), 注意

$$\frac{x^2y'}{xyy'-y^2}=\frac{y'}{\dfrac{y}{x}y'-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},$$

因此可知

$$H\left(\frac{y}{x},y'\right)=2\left(\frac{x}{y}\right)y'+\left(y'-\frac{y}{x}\right)^2G\left(\frac{y}{x},\frac{y'}{\dfrac{y}{x}\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)}\right).$$

(3) 直接法. 显然, (3.74a,b) 的不变量为 $y/x,y',yy''$. 因此, 拥有 (3.74a,b) 的最一般的二阶 ODE 为

$$y''=\frac{1}{y}I\left(\frac{y}{x},y'\right),\tag{3.145}$$

其中 I 为任意函数. 比较 (3.144) 和 (3.145), 注意

$$\frac{xy'-y}{x^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{y}{x}y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right),$$

因此可知

$$I\left(\frac{y}{x},y'\right)=\left(\frac{y}{x}y'-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)H\left(\frac{y}{x},y'\right).$$

习 题 3.3

1. 令 $y=\phi(x)$ 是二阶线性非齐次 ODE

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)\tag{3.146}$$

的特解.

(a) 求 (3.146) 拥有的单参数 Lie 点变换群;

(b) 用正则坐标将 ODE(3.146) 约化为一阶 ODE 和求积分;

(c) 用微分不变性将 ODE(3.146) 约化为一阶 ODE 和求积分.

2. 三阶 Blasius 方程 (3.113) 拥有 2 参数 (α, β) Lie 点变换群 (3.114a,b).

(a) 用辅助参数 β 的正则坐标将 ODE(3.113) 约化为二阶 ODE.

(b) 求该二阶 ODE 的对称. 该对称是如何与 (3.114a,b) 的参数 α 相联系的?

(c) 求 (b) 中对称的正则坐标. 结果, 将 Blasius 方程约化为一阶 ODE 和两个求积分.

3. 发现如下 ODE 的 Lie 点变换群

$$y'' = \alpha(y')^N,$$

其中 α =const, $N = 1, 2, \cdots$ 是固定的整数. 进一步研究情况 $N = 1, 2, 3$. 将这些情况拥有的 Lie 群与 $y'' = 0$ 拥有的 Lie 群进行比较 (对于有关的 ODEs, 参考文献 (Aquirre, Krause, 1985)).

4. 求如下每一个 ODEs:

(a) $y'' = y^{-3}$;

(b) $y'' = \mathrm{e}^{-y'}$

拥有的 Lie 点变换群.

5. 利用尺度变换作用下的不变性求非线性热传导方程的不变解, 可得如下的 ODE(Bluman, Kumei, 1989b, 7.2.7 节)

$$2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(K(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.147}$$

(a) 求 ODE(3.147) 拥有的 Lie 点变换群, 当

(i) $K(y) = \lambda(y+\kappa)^\nu$, 其中 λ, κ, ν 是任意常数;

(ii) $K(y) = \lambda\mathrm{e}^{\nu y}$, 其中 λ, ν 是任意常数.

(b) 求所有的 $K(y)$, 使得 (3.147) 拥有 Lie 点变换群.

6. 利用尺度变换作用下相关的势系统的不变性寻找非线性热传导方程的不变解, 可得如下的 ODE(Bluman, Kumei, 1989a, 27.3.1 节):

$$K(y')y'' + xy' - y = 0. \tag{3.148}$$

(a) 求 ODE(3.148) 拥有的 Lie 点变换群, 当

(i) $K(y') = \dfrac{1}{1+(y')^2}$;

(ii) $K(y') = \dfrac{1}{1+(y')^2}\exp[\lambda \arctan y'], \lambda = \text{const}.$

(b) 求解 (3.148), 当 $K(y') = 1/[1 + (y')^2]$.

7. 求曲线族 $y = p(x)$ 拥有的 Lie 点变换群, 其中 $p(x)$ 是任意的 n 次多项式.

8. 求拥有尺度变换群 $x^* = \alpha x, \quad y^* = \alpha^k y$ 的最一般的二阶 ODE, 其中 k 是固定常数. 约化该 ODE 为一阶 ODE 和求积分.

9. (a) 求拥有旋转群的最一般的二阶 ODE;

(b) 从几何角度解释所得到的结果;

(c) 求如下 ODE 的通解 $(x^2 + y^2)y'' + 2(y - xy')(1 + (y')^2) = 0$.

10. 证明定理 3.3.4.1.

3.4　多参数 Lie 点变换群作用下阶的约化

现在考虑 r 参数 Lie 点变换群 $r \geqslant 2$ 作用下 n 阶 ODE 的不变性. 如果相应的 r 维 Lie 代数是可解的 (参看 2.5.4 节), 则可以证明, 给定 n 阶 ODE 能够约化为 $n-r$ 阶 ODE 加上 r 个求积分. 定理 2.5.2.2 表明任意二维 Lie 代数是可解的. 可知作用在 $\mathbf{R}^n$ 上的每个偶数维 ($r = 2m, m$ 为整数) 的 Lie 代数包含二维的子代数 (Cohen (1911) 和 Dickson (1924) 都错误地声称对于作用在 $\mathbf{R}^n$ 上的任意实 Lie 代数是正确的. 他们的证明仅仅对于偶数维的复或实的 Lie 代数是成立的. 容易证明, 对应于作用在 $\mathbf{R}^3$ 上的旋转群的 Lie 代数 SO(3) 并不是可解的. 可以验证, 存在作用在 $\mathbf{R}^2$ 上的三维 Lie 代数同构于 SO(3) , 因此不是可解的).

3.4.1　2 参数 Lie 群作用下二阶 ODE 的不变性

现在证明, 如果二阶 ODE

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.149}$$

拥有 2 参数 Lie 点变换群, 那么可以构造性地约化 ODE(3.149) 为两个求积分, 因此可求它的通解.

令 X_1, X_2 是给定 2 参数 Lie 点变换群的 Lie 代数的基本生成元, $X_i^{(k)}$ 表示 $X_i, i = 1, 2$ 的 k 阶延拓的无穷小生成元. 不失一般性, 由定理 2.5.4.2, 对于某个常数 λ, 假设

$$[X_1, X_2] = \lambda X_1. \tag{3.150}$$

令 $u(x, y), v(x, y, y')$ 为 $X_1^{(2)}$ 的不变量, 使得

$$X_1 u = 0, \quad X_1^{(1)} v = 0.$$

因此, 相应的微分不变量 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u$ 满足方程 (参看 3.3.2 节)

$$X_1^{(2)} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 0,$$

从而, ODE (3.149) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = H(u,v), \tag{3.151}$$

其中 H 为 u, v 的函数 (注意, $\partial v/\partial y' \neq 0$), 由交换关系 (3.150) 可得

$$X_1 X_2 u = X_2 X_1 u + \lambda X_1 u = 0.$$

因此, 对于 u 的某个函数 α, 有

$$X_2 u = \alpha(u). \tag{3.152a}$$

类似地, 由定理 2.5.2.3, 可断定

$$X_1^{(1)} X_2^{(1)} v = 0, \quad X_1^{(2)} X_2^{(2)} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = 0.$$

从而对于 u, v 的某个函数 β, 得

$$X_2^{(1)} v = \beta(u,v). \tag{3.152b}$$

因为 ODE (3.149) 拥有 X_2, 所以可知

$$X_2^{(2)} \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} - H(u,v) \right) = 0, \quad \text{当} \ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = H(u,v).$$

由 (3.152a,b), 根据坐标 u 和 v 可知, ODE(3.151) 拥有如下的一阶延拓

$$X_2^{(1)} = \alpha(u) \frac{\partial}{\partial u} + \beta(u,v) \frac{\partial}{\partial v}.$$

考虑正则坐标 $R(u,v), S(u,v)$, 有

$$X_2^{(1)} R = 0, \quad X_2^{(1)} S = 1.$$

从而 $R(u,v), S(u,v)$ 满足

$$\alpha(u) \frac{\partial R}{\partial u} + \beta(u,v) \frac{\partial R}{\partial v} = 0,$$

$$\alpha(u) \frac{\partial S}{\partial u} + \beta(u,v) \frac{\partial S}{\partial v} = 1.$$

因此, ODE (3.151) 拥有单参数 Lie 变换群

$$R^* = R, \tag{3.153a}$$

$$S^* = S + \varepsilon, \tag{3.153b}$$

所以对于 R 的某个函数 I, ODE (3.151) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R} = I(R). \tag{3.154}$$

进而, 积分一阶 ODE (3.154) 得

$$S(u,v) = \int^{R(u,v)} I(R)\mathrm{d}R + C_1, \tag{3.155}$$

其中 C_1 为任意常数. 微分方程

$$S(u(x,y), v(x,y,y')) = \int^{R(u(x,y),v(x,y,y'))} I(R)\mathrm{d}R + C_1$$

拥有 X_1, 因此, 通过确定 $r(x,y)$ 和 $s(x,y)$ 满足

$$X_1 r = 0, \quad X_1 s = 1.$$

利用正则坐标法, 该微分方程可约化为求积分. 从而, 拥有 2 参数 Lie 变换群的任意二阶 ODE 完全可约化为两个求积分.

作为例子, 考虑二阶线性非齐次 ODE

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{3.156}$$

令 $z = \phi_1(x)$,$z = \phi_2(x)$ 是对应齐次方程

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0 \tag{3.157}$$

的两个线性无关的解. 那么 ODE (3.156) 拥有 2 参数 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$Lie 变换群

$$x^* = x, \tag{3.158a}$$

$$y^* = y + \varepsilon_1\phi_1(x) + \varepsilon_2\phi_2(x). \tag{3.158b}$$

相应的无穷小生成元为

$$X_1 = \phi_1(x)\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \phi_2(x)\frac{\partial}{\partial y},$$

且 $[X_1, X_2] = 0$. 因此

$$X_i^{(1)} = \phi_i(x)\frac{\partial}{\partial y} + \phi_i'(x)\frac{\partial}{\partial y'}, \quad i = 1, 2,$$

$$u = x, \quad v = \frac{y'}{\phi_1'} - \frac{y}{\phi_1(x)},$$

$$X_2u = X_2x = 0, \quad X_2^{(1)}v = \frac{\phi_2'(x)}{\phi_1'(x)} - \frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)} = \frac{W(x)}{\phi_1(x)\phi_1'(x)},$$

其中 $W(x)$ 是 Wronske 行列式 $W(x) = \phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'$. 根据坐标 x 和 v, 有

$$X_2^{(1)} = \frac{W(x)}{\phi_1(x)\phi_1'(x)}\frac{\partial}{\partial v}.$$

正则坐标 $R(x,v), S(x,v)$ 满足

$$X_2^{(1)}R = \frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial R}{\partial v} = 0, \quad X_2^{(1)}S = \frac{W}{\phi_1\phi_1'}\frac{\partial S}{\partial v} = 1,$$

因此

$$R = x, \quad S = \frac{v\phi_1\phi_1'}{W}.$$

从而, 通过简单的计算得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(x)},$$

使得

$$S = \frac{y'\phi_1 - y\phi_1'}{W} = \int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x + C_2, \tag{3.159}$$

其中 C_2 为任意常数.

计算可知, 一阶 ODE (3.159) 拥有 $X_1 = \phi_1(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$. 根据相应的正则坐标 $r = x, \quad s = y/\phi_1(x)$, ODE (3.159) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \frac{W}{(\phi_1)^2}\left[\int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x + C_2\right]. \tag{3.160}$$

但是, $W/(\phi_1)^2 = (\phi_2/\phi_1)'$. 从而

$$\frac{W}{(\phi_1)^2}\int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\phi_2}{\phi_1}\int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x\right] - \frac{g\phi_2}{W}.$$

因此, 对于任意常数 C_1, 有

$$s = C_2\frac{\phi_2}{\phi_1} + \frac{\phi_2}{\phi_1}\int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x - \int \frac{g\phi_2}{W}\mathrm{d}x + C_1,$$

其导致 ODE(3.156) 的熟知的通解. 在标准的教材中, 通过参数变化可得到

$$y = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \phi_2\int \frac{g\phi_1}{W}\mathrm{d}x - \phi_1\int \frac{g\phi_2}{W}\mathrm{d}x. \tag{3.161}$$

3.4.2　2 参数 Lie 群作用下 n 阶 ODE 的不变性

现在假设 n 阶 $(n \geqslant 3)$ODE

$$y_n = f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) \tag{3.162}$$

在具有无穷小生成元 X_1, X_2 的 2 参数 Lie 点变换群作用下是不变的, 不失一般性, 对于某个常数 λ, 有 $[X_1, X_2] = \lambda X_1$ (参考定理 2.5.4.2).

如 3.4.1 节, 令 $u(x, y), v(x, y, y_1) = v(x, y, y')$ 是 $X_1^{(2)}$ 的不变量. 那么 $X_1^{(2)} v_1 = 0$, 其中 $v_1 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$, 因而 ODE(3.162) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}v}{\mathrm{d}u^{n-1}} = H\left(u, v, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-2}v}{\mathrm{d}u^{n-2}}\right), \tag{3.163}$$

其中 H 为 $u, v, \mathrm{d}v/\mathrm{d}u, \cdots, \mathrm{d}^{n-2}v/\mathrm{d}u^{n-2}$ 的某个函数.

因为 $[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] = \lambda X_1^{(k)}, k = 1, 2, \cdots$, 因此可知

$$X_2 u = \alpha(u),$$

$$X_2^{(1)} v = \beta(u, v),$$

其中 α, β, γ 是函数. 则

$$X_2^{(1)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial}{\partial v},$$

且 ODE(3.163) 拥有的一阶延拓为

$$X_2^{(2)} = \alpha(u)\frac{\partial}{\partial u} + \beta(u, v)\frac{\partial}{\partial v} + \gamma(u, v, v_1)\frac{\partial}{\partial v_1},$$

现在, 令 $U(u, v), V(u, v, v_1)$ 是 $X_2^{(2)}$ 的不变量, 有

$$X_2^{(1)} U = 0, \quad X_2^{(2)} V = 0.$$

则

$$X_2^{(3)} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = 0.$$

从而, ODE(3.163) 以及 ODE(3.162) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}^{n-2}V}{\mathrm{d}U^{n-2}} = I\left(U, V, \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-3}V}{\mathrm{d}U^{n-3}}\right), \tag{3.164}$$

其中 I 为 $U, V, \mathrm{d}V/\mathrm{d}U, \cdots, \mathrm{d}^{n-3}V/\mathrm{d}U^{n-3}$ 的函数. 如果

$$V = \phi(U; C_1, C_2, \cdots, C_{n-2})$$

为 ODE(3.164) 的通解, 那么一阶 ODE

$$V\left(u,v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)=\phi(U(u,v);C_1,C_2,\cdots,C_{n-2}) \tag{3.165}$$

拥有 $X_2^{(1)}=\alpha(u)\dfrac{\partial}{\partial u}+\beta(u,v)\dfrac{\partial}{\partial v}$. 因而, ODE (3.165) 约化为求积分

$$v=\psi(u;C_1,C_2,\cdots,C_{n-2},C_{n-1}).$$

但是, 一阶 ODE

$$v(x,y,y')=\psi(u(x,y);C_1,C_2,\cdots,C_{n-2},C_{n-1}) \tag{3.166}$$

拥有 X_1. 进而, ODE (3.166) ($n\geqslant 3$) 约化为求积分, 其导致 ODE(3.162) 的通解.

因此, 如果 n 阶 ODE ($n\geqslant 3$)) 拥有 2 参数 Lie 点变换群, 那么可以构造性地将它约化为 $n-2$ 阶 ODE 和两个求积分. 值得注意的是, 如果 $\lambda\neq 0$, 那么所使用的算子 X_1 和 X_2 中的阶是至关紧要的.

作为第一个例子, 再考虑 Blasius 方程

$$y'''+\frac{1}{2}yy''=0, \tag{3.167}$$

其拥有 2 参数 Lie 点变换群 (参看 (3.139a,b)), 它的无穷小生成元为

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}.$$

则

$$[X_1,X_2]=X_1.$$

$X_1^{(2)}$ 的不变量为

$$u=y,\quad v=y'=y_1,\quad v_1=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{y_2}{y_1}.$$

由此可知

$$X_2^{(2)}=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}-2y_1\frac{\partial}{\partial y_1}-3y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$X_2u=-y=-u,\quad X_2^{(1)}v=-2y_1=-2v,\quad X_2^{(2)}v_1=-\frac{y_2}{y_1}=-v_1.$$

那么

$$X_2^{(1)}U(u,v)=0,\quad X_2^{(2)}V(u,v,v_1)=0,$$

使得

$$U=\frac{v}{u^2},\quad V=\frac{v_1}{u}.$$

从而, 三阶 Blasius 方程 (3.167) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}=\frac{\mathrm{d}((yy_1)^{-1}y_2)}{\mathrm{d}(y^{-2}y_1)}=\frac{y^2y_1y_3-y^2(y_2)^2-y(y_1)^2y_2}{y(y_1)^2y_2-2(y_1)^4}=\frac{\frac{1}{2}y^3y_1y_2+y^2(y_2)^2+y(y_1)^2y_2}{2(y_1)^4-y(y_1)^2y_2},$$

根据 U 和 V, 其变为一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U}=\frac{V}{U}\left[\frac{\frac{1}{2}+V+U}{2U-V}\right]. \tag{3.168}$$

如果 $V=\phi(U;C_1)$ 是 ODE(3.168) 的通解, 那么一阶 ODE

$$v_1=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=u\phi\left(\frac{v}{u^2};C_1\right) \tag{3.169}$$

拥有 $X_2^{(1)}=-u\dfrac{\partial}{\partial u}-2v\dfrac{\partial}{\partial v}$. 根据相应的正则坐标 $r=v/u^2,\quad s=\log v$, ODE(3.169) 变为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=\frac{\phi(r;C_1)}{r[\phi(r;C_1)-2r]}. \tag{3.170}$$

这导致求积分

$$v=C_2\exp\left[\int^r\frac{\phi(\rho;C_1)}{\rho[\phi(\rho;C_1)-2\rho]}\mathrm{d}\rho\right], \tag{3.171}$$

其中 $v=y_1, r=y_1/y^2$. 原则上, (3.171) 可以表示为可解形式

$$y'=\psi(y;C_1,C_2),$$

其拥有 $X_1=\dfrac{\partial}{\partial x}$, 因此约化为求积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y;C_1,C_2)}=x+C_3. \tag{3.172}$$

方程 (3.172) 代表 Blasius 方程的通解.

作为第二个例子, 考虑三阶 ODE

$$yy'\left(\frac{y}{y'}\right)''=\pm1, \tag{3.173}$$

其源于研究具有波速 $y(x)$ 的波方程的群性质 (Bluman, Kumei, 1987). 显然, ODE (3.173) 拥有 2 参数 Lie 变换群

$$x^*=ax+b,$$
$$y^*=ay.$$

容易证明, 相应微分不变量为

$$U = y', \quad V = yy''.$$

从而, ODE (3.173) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = 2\frac{V}{U} \mp \frac{U}{V}. \tag{3.174}$$

偶然的情况, 一阶 ODE (3.174) 拥有尺度

$$U^* = \lambda U, \quad V^* = \lambda V.$$

从而, 容易发现 ODE(3.174) 的通解为

$$U^{-2}\left[\left(\frac{V}{U}\right)^2 \mp 1\right] = \text{const.} \tag{3.175}$$

根据 (3.175) 中常数的符号, 考虑两种情况. 我们将要考虑常数为 $\upsilon^2 \geqslant 0, \upsilon =$ const. 情况. 这里方便地选择对应于关于 x 的平移作用下保持不变的一阶微分不变量作为新的变量:

$$u = y, \quad v = y' = U.$$

则 (3.175) 变为一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\sqrt{\upsilon^2 v \pm 1}}{u}. \tag{3.176}$$

ODE(3.176) 的通解为

$$v = \frac{1}{2\upsilon}[(\rho u)^{\upsilon} \mp (\rho u)^{-\upsilon}], \tag{3.177}$$

其中 ρ 是任意常数. 不失一般性, 通过使 x 和 y 具有相同的尺度, 可以令 $\rho = 1$. 因此, 以尺度 $x^* = ax, y^* = ay$ 为模, 三阶 ODE (3.173) 约化为

$$y' = \frac{1}{2\upsilon}[y^{\upsilon} \mp y^{-\upsilon}],$$

即正则形式

$$y' = \frac{1}{\upsilon}\sinh(\upsilon \log y), \tag{3.178a}$$

或

$$y' = \frac{1}{\upsilon}\cosh(\upsilon \log y). \tag{3.178b}$$

如果 (3.175) 中的常数为 $-\upsilon^2 \leqslant 0$, 那么通过同样的过程能够证明, 以关于 x 和 y 的同样尺度为模, 三阶 ODE (3.173) 可约化为正则形式

$$y' = \frac{1}{\upsilon}\sin(\upsilon \log y). \tag{3.178c}$$

ODE (3.178c) 的解的形式是最有意义的 (Bluman, Kumei, 1988).

3.4.3　具有可解 Lie 代数的 r 参数 Lie 群作用下 n 阶 ODE 的不变性

如果 n 阶 ODE $(n \geqslant r)$ 拥有 r 参数 Lie 点变换群 $(r \geqslant 3)$, 那么未必总可以将它约化为 $(n-r)$ 阶 ODE 和 r 个求积分. 我们将要证明, 如果由群的无穷小生成元构成的 Lie 代数 L^r 是可解 Lie 代数 (参看 2.5.4 节), 那么那样的约化总是可能的. 则 L^r 具有基本生成元集 $X_1, X_2, \cdots, X_r$, 且满足交换关系

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{j-1} C_{ij}^k X_k, \quad 1 \leqslant i < j, j = 2, \cdots, r, \tag{3.179}$$

其中 C_{ij}^k 是实结构常数 (习题 3.4.7). 对于一些常数 C_{ij}^k, 相应的 m 阶延拓的无穷小生成元 $X_j^{(m)}$ 满足

$$[X_i^{(m)}, X_j^{(m)}] = \sum_{k=1}^{j-1} C_{ij}^k X_k^{(m)}, \quad 1 \leqslant i < j, j = 2, \cdots, r. \tag{3.180}$$

现在考虑 n 阶 ODE

$$y_n = F_n(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}), \tag{3.181}$$

其中 F_n 为给定的函数. 假设 ODE(3.181) 拥有 r 参数 Lie 点变换群 $(3 \leqslant r \leqslant n)$, 它的无穷小生成元 $X_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 构成可解 Lie 代数, 特别地, 对于一些常数 C_{ij}^k, 满足交换关系 (3.179).

令 $u_{(1)}(x, y), v_{(1)}(x, y, y_1)$ 是不变量, 使得

$$X_1 u_{(1)} = 0, \quad X_1^{(1)} v_{(1)} = 0.$$

则

$$X_1^{(k+1)} \frac{\mathrm{d}^k v_{(1)}}{\mathrm{d}u_{(1)}^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

令

$$v_{(1)k} = \frac{\mathrm{d}^k v_{(1)}}{\mathrm{d}u_{(1)}^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

根据不变量 $u_{(1)}, v_{(1)}$ 和 $X_1^{(n)}$ 的微分不变量 $v_{(1)k}, k = 1, 2, \cdots, n-1$, ODE (3.181) 约化为 $(n-1)$ 阶 ODE

$$v_{(1)n-1} = F_{n-1}(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}, \cdots, v_{(1)n-2}), \tag{3.182}$$

其中 F_{n-1} 是 $X_1^{(n)}$ 的展示的不变量的函数.

由 (3.179) 和 (3.180) 可知

$$X_2 u_{(1)} = \alpha_1(u_{(1)}), \quad X_2^{(1)} v_{(1)} = \beta_1(u_{(1)}, v_{(1)}), \quad X_2^{(2)} v_{(1)1} = \gamma_1(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}),$$

其中 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 是函数. 因而, ODE(3.182) 拥有单参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为

$$X_2^{(1)} = \alpha_1(u_{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_{(1)}} + \beta_1(u_{(1)}, v_{(1)}) \frac{\partial}{\partial v_{(1)}},$$

它的一阶延拓为

$$X_2^{(2)} = X_2^{(1)} + \gamma_1(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}) \frac{\partial}{\partial v_{(1)1}}.$$

令 $u_{(2)}(u_{(1)}, v_{(1)}), v_{(2)}(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1})$ 为不变量, 使得

$$X_2^{(1)} u_{(2)} = 0, \quad X_2^{(2)} v_{(2)} = 0. \tag{3.183}$$

则

$$X_2^{(2+k)} \frac{\mathrm{d}^k v_{(2)}}{\mathrm{d}u_{(2)}^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-2.$$

令

$$v_{(2)k} = \frac{\mathrm{d}^k v_{(2)}}{\mathrm{d}u_{(2)}^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-2.$$

根据 $X_2^{(n)}$ 的不变量 $u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)k}, k = 1, 2, \cdots, n-2$ (也是 $X_1^{(n)}$ 的不变量), ODE (3.182) 和 (3.181) 约化为 $(n-2)$ 阶 ODE

$$v_{(2)n-2} = F_{n-2}(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}, \cdots, v_{(2)n-3}), \tag{3.184}$$

其中 F_{n-2} 是关于 $X_2^{(n)}, X_1^{(n)}$ 的指示的不变量的某个函数.

由 (3.179) 和 (3.180) 可知

$$X_1^{(1)} X_3^{(1)} u_{(2)} = 0, \tag{3.185a}$$

$$X_2^{(1)} X_3^{(1)} u_{(2)} = 0. \tag{3.185b}$$

则对于 $u_{(1)}, v_{(1)}$ 的某个函数 A, (3.185a) 导致

$$X_3^{(1)} u_{(2)} = A(u_{(1)}, v_{(1)}). \tag{3.186}$$

由 (3.185b) 得

$$X_3^{(1)} u_{(2)} = A(u_{(1)}, v_{(1)}) = \alpha_2(u_{(2)}),$$

其中 α_2 是 $u_{(2)}$ 的某个函数. 类似地,

$$X_3^{(2)}v_{(2)} = \beta_2(u_{(2)}, v_{(2)}), \quad X_3^{(3)}v_{(2)1} = \gamma_2(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}),$$

这里 β_2, γ_2 是某些函数. 因而, ODE (3.184) 拥有点对称

$$X_3^{(2)} = \alpha_2(u_{(2)})\frac{\partial}{\partial u_{(2)}} + \beta_2(u_{(2)}, v_{(2)})\frac{\partial}{\partial v_{(2)}}, \tag{3.187}$$

且它的一阶延拓为

$$X_3^{(3)} = X_3^{(2)} + \gamma_2(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1})\frac{\partial}{\partial v_{(2)1}}.$$

那么, 令 $u_{(3)}(u_{(2)}, v_{(2)}), v_{(3)}(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1})$ 是不变量, 使得

$$X_3^{(2)}u_{(3)} = 0, \quad X_3^{(3)}v_{(3)} = 0. \tag{3.188}$$

从而可知

$$X_3^{(3+k)}\frac{\mathrm{d}^k v_{(3)}}{\mathrm{d}u_{(3)}^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-3.$$

令

$$v_{(3)k} = \frac{\mathrm{d}^k v_{(3)}}{\mathrm{d}u_{(3)}^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-3.$$

根据 $X_3^{(n)}$ 的不变量 $u_{(3)}, v_{(3)}, v_{(3)k}, k = 1, 2, \cdots, n-3$(也是 $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}$ 的不变量), ODE (3.184) 和 (3.181) 约化为 $(n-3)$ 阶 ODE

$$v_{(3)n-3} = F_{n-3}(u_{(3)}, v_{(3)}, v_{(3)1}, \cdots, v_{(3)n-4}), \tag{3.189}$$

其中 F_{n-3} 是关于所表示的不变量的某个函数.

继续归纳, 假设对于 $q = 3, \cdots, m, m < r$,

$$u_{(q)}(u_{(q-1)}, v_{(q-1)}), \quad v_{(q)}(u_{(q-1)}, v_{(q-1)}, v_{(q-1)1})$$

是不变量, 使得

$$X_p^{(q-1)}u_{(q)} = 0, \quad X_p^{(q)}v_{(q)} = 0, \quad p = 1, 2, \cdots, q,$$

$$X_p^{(q+k)}\frac{\mathrm{d}^k v_{(q)}}{\mathrm{d}u_{(q)}^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-q, \quad 1 \leqslant p \leqslant q.$$

令 $v_{(q)k} = \mathrm{d}^k v_{(q)}/\mathrm{d}u_{(q)}^k, k = 1, 2, \cdots, n-q$. 则 n 阶 ODE(3.181) 约化为 $(n-m)$ 阶 ODE

$$v_{(m)n-m} = F_{n-m}(u_{(m)}, v_{(m)}, v_{(m)1}, \cdots, v_{(m)n-m-1}), \tag{3.190}$$

其中 F_{n-m} 是关于 $X_m^{(n)}, X_{m-1}^{(n)}, \cdots, X_2^{(n)}, X_1^{(n)}$ 的展示的不变量的某个函数.

为了从步骤 m 到步骤 $m+1$，我们继续考虑如下：由 (3.180) 可得

$$X_j^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

则由 $X_1^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0$ 有

$$X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = A_1(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}, \cdots, v_{(1)m-2}),$$

其中 A_1 是 $X_1^{(m-1)}$ 的不变量的函数. 类似地, 由 $X_2^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0$ 有

$$A_1 = A_2(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}, \cdots, v_{(2)m-3}),$$

A_2 是 $X_2^{(m-1)}, X_1^{(m-1)}$ 的不变量的函数. 因此, 由 $X_l^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0$ 有

$$A_1 = A_l(u_{(l)}, v_{(l)}, v_{(l)1}, \cdots, v_{(l)m-l-1}),$$

A_l 是 $X_l^{(m-1)}, X_{l-1}^{(m-1)}, \cdots, X_1^{(m-1)}(1 \leqslant l \leqslant m-2)$ 的不变量的函数. 最后, 由 $X_m^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0$ 有

$$A_1 = A_{m-1}(u_{(m-1)}, v_{(m-1)}),$$

A_{m-1} 是 $X_{m-1}^{(m-1)}, X_{m-2}^{(m-1)}, \cdots, X_1^{(m-1)}$ 的不变量 $u_{(m-1)}, v_{(m-1)}$ 的函数. 最后, 由 $X_m^{(m-1)} X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = 0$ 有

$$X_{m+1}^{(m-1)} u_{(m)} = A_1 = \alpha_m(u_{(m)}),$$

类似地, 可证明

$$X_{m+1}^{(m)} v_{(m)} = \beta_m(u_{(m)}, v_{(m)}), \quad X_{m+1}^{(m+1)} v_{(m)1} = \gamma_m(u_{(m)}, v_{(m)}, v_{(m)1}),$$

其中 β_m, γ_m 是函数. 因为由 ODE(3.181) 有 X_{m+1}, 所以由 ODE (3.190) 有

$$X_{m+1}^{(m)} = \alpha_m(u_{(m)}) \frac{\partial}{\partial u_{(m)}} + \beta_m(u_{(m)}, v_{(m)}) \frac{\partial}{\partial v_{(m)}},$$

且它的一阶延拓为

$$X_{m+1}^{(m+1)} = X_{m+1}^{(m)} + \gamma_m(u_{(m)}, v_{(m)}, v_{(m)1}) \frac{\partial}{\partial v_{(m)1}},$$

现在, 令 $u_{(m+1)}(u_{(m)}, v_{(m)}), v_{(m+1)}(u_{(m)}, v_{(m)}, v_{(m)1})$ 是不变量, 使得

$$X_{m+1}^{(m)} u_{(m+1)} = 0, \quad X_{m+1}^{(m+1)} v_{(m+1)} = 0.$$

则

$$X_{m+1}^{(m+1+k)} \frac{\mathrm{d}^k v_{(m+1)}}{\mathrm{d}u_{(m+1)}{}^k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n-m-1.$$

令

$$v_{(m+1)k} = \frac{\mathrm{d}^k v_{(m+1)}}{\mathrm{d}u_{(m+1)}{}^k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n-m-1.$$

根据 $X_{m+1}^{(n)}$ 的不变量 $u_{(m+1)}, v_{(m+1)}, v_{(m+1)k}, k = 1, 2, \cdots, n-m-1$ (也是 $X_1^{(n)}$, $X_2^{(n)}, \cdots, X_m^{(n)}$ 的不变量), ODE (3.190) 和 (3.181) 约化为 $(n-m-1)$ 阶 ODE

$$v_{(m+1)n-m-1} = F_{n-m-1}(u_{(m+1)}, v_{(m+1)}, v_{(m+1)1}, \cdots, v_{(m+1)n-m-2}), \tag{3.191}$$

其中 F_{n-m-1} 是关于 X_{m+1}^n 的指示的不变量的某个函数.

最后, 两种不同的情况为:

情况 I. $3 \leqslant r < n$.

ODE(3.181) 约化为 $(n-r)$ 阶 ODE

$$v_{(r)n-r} = F_{n-r}(u_{(r)}, v_{(r)}, v_{(r)1}, \cdots, v_{(r)n-r-1}) \tag{3.192}$$

和 r 个求积分, 其中 F_{n-r} 是 $X_r^{(n)}$ 的不变量的函数. 求积分如下:

假设

$$v_{(r)} = \phi_r(u_{(r)}; C_1, C_2, \cdots, C_{n-r})$$

是 ODE(3.192) 的通解. 则一阶 ODE

$$v_{(r)}(u_{(r-1)}, v_{(r-1)}, v_{(r-1)1}) = \phi_r(u_{(r)}(u_{(r-1)}, v_{(r-1)}); C_1, C_2, \cdots, C_{n-r})$$

拥有

$$X_r^{(r-1)} = \alpha_{r-1}(u_{(r-1)}) \frac{\partial}{\partial u_{(r-1)}} + \beta_{r-1}(u_{(r-1)}, v_{(r-1)}) \frac{\partial}{\partial v_{(r-1)}},$$

其导致求积分

$$v_{(r-1)} = \phi_{r-1}(u_{(r-1)}; C_1, C_2, \cdots, C_{n-r+1}),$$

其中 ϕ_{r-1} 是某个函数. 继续归纳, 假设已得

$$v_{(k)} = \phi_k(u_{(k)}; C_1, C_2, \cdots, C_{n-k}).$$

则一阶 ODE

$$v_{(k)}(u_{(k-1)}, v_{(k-1)}, v_{(k-1)1}) = \phi_k(u_{(k)}(u_{(k-1)}, v_{(k-1)}); C_1, C_2, \cdots, C_{n-k})$$

拥有

$$X_k^{(k-1)} = \alpha_{k-1}(u_{(k-1)})\frac{\partial}{\partial u_{(k-1)}} + \beta_{k-1}(u_{(k-1)}, v_{(k-1)})\frac{\partial}{\partial v_{(k-1)}},$$
$$k = r, r-1, \cdots, 1, \quad v_{(0)} = y,$$

导致求积分

$$v_{(k-1)} = \phi_{k-1}(u_{(k-1)}; C_1, C_2, \cdots, C_{n-k+1}), \quad k = r, r-1, \cdots, 1, \quad v_{(0)} = y,$$

其中 ϕ_{k-1} 是某个函数.

情况 II. $3 \leqslant r = n$.

ODE(3.181) 约化为一阶 ODE

$$v_{(n-1)1} = F_1(u_{(n-1)}, v_{(n-1)}) \tag{3.193}$$

和 $n-1$ 个求积分, 其中 F_1 是 $X_{n-1}^{(n)}$ 不变量 $u_{(n-1)}, v_{(n-1)}$ 的函数, 如情况 I 展示的那样可得. 一阶 ODE(3.193) 约化为求积分, 因为 ODE (3.193) 拥有

$$X_n^{(n-1)} = \alpha_{n-1}(u_{(n-1)})\frac{\partial}{\partial u_{(n-1)}} + \beta_{n-1}(u_{(n-1)}, v_{(n-1)})\frac{\partial}{\partial v_{(n-1)}}.$$

因此, ODE(3.175) 的解约化为 n 个求积分.

值得注意的是, 在将 n 阶 ODE 约化为 $(n-r)$ 阶 ODE 和 r 个求积分中, 从 r 参数 Lie 点变换群作用下它的不变性, 它的无穷小生成元构成 r 维可解 Lie 代数, 并不需要确定序的中间的 ODEs. 而且, 在情况 I 中, 并不需要确定序 $n-1$, $n-2, \cdots, n-r+2$ 中间的 ODE.

作为例子, 考虑四阶 ODE

$$\left[yy'\left(\frac{y}{y'}\right)''\right]' = 0, \tag{3.194}$$

其源于非齐次媒介中研究波方程的不变性 (Bliman, Kumei, 1987,1988). 显然, ODE (3.194) 拥有 3 参数 (a, b, c)Lie 点变换群

$$x^* = ax + b, \tag{3.195a}$$

$$y^* = cy. \tag{3.195b}$$

相应的无穷小生成元 $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ (参数 b), $X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$ (参数 a), $X_3 = y\frac{\partial}{\partial y}$ (参数 c) 满足

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_2, X_3] = 0, \quad [X_1, X_3] = 0,$$

其是 (3.179) 的交换关系. 为了执行约化算法, 首先需要下面拓展的无穷小生成元:

$$X_1^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2^{(1)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_2^{(2)} = x\frac{\partial}{\partial x} - y_1\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$X_3^{(1)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad X_3^{(2)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$X_3^{(3)} = y\frac{\partial}{\partial y} + y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

由

$$X_1 u_{(1)} = 0, \quad X_1^{(1)} v_{(1)} = 0, \quad v_{(1)1} = \frac{\mathrm{d}v_{(1)}}{\mathrm{d}u_{(1)}},$$

可得

$$u_{(1)} = y, \quad v_{(1)} = y_1, \quad v_{(1)1} = \frac{y_2}{y_1}.$$

则

$$\alpha_1(u_{(1)}) = X_2 u_{(1)} = 0, \quad \beta_1(u_{(1)}, v_{(1)}) = X_2^{(1)} v_{(1)} = -v_{(1)},$$

$$\gamma_1(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}) = X_2^{(2)} v_{(1)1} = -\frac{y_2}{y_1} = -v_{(1)1}.$$

因此, 根据 $u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}$ 可得

$$X_2^{(1)} = -u_{(1)}\frac{\partial}{\partial u_{(1)}}, \quad X_2^{(2)} = -u_{(1)}\frac{\partial}{\partial u_{(1)}} - u_{(1)1}\frac{\partial}{\partial u_{(1)1}}.$$

现在, 由

$$X_2^{(1)} u_{(2)} = 0, \quad X_2^{(2)} v_{(2)} = 0, \quad v_{(2)1} = \frac{\mathrm{d}v_{(2)}}{\mathrm{d}u_{(2)}},$$

得

$$u_{(2)} = u_{(1)} = y, \quad v_{(2)} = \frac{v_{(1)1}}{v_{(1)}} = \frac{y_2}{(y_1)^2}, \quad v_{(2)1} = \frac{y_1 y_3 - 2(y_2)^2}{(y_1)^4}.$$

则

$$\alpha_2(u_{(2)}) = X_3^{(1)} u_{(2)} = y = u_{(2)}, \quad \beta_2(u_{(2)}, v_{(2)}) = X_3^{(2)} v_{(2)} = -\frac{y_2}{(y_1)^2} = -v_{(2)},$$

$$\gamma_2(u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}) = X_3^{(3)} v_{(2)1} = \frac{4(y_2)^2 - 2y_1 y_3}{(y_1)^4} = -2v_{(2)1}.$$

因而, 根据 $u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}$ 有

$$X_3^{(2)} = u_{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{(2)}} - v_{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{(2)}}, \quad X_3^{(3)} = u_{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{(2)}} - v_{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{(2)}} - 2v_{(2)1}\frac{\partial}{\partial v_{(2)1}}.$$

现在, 由 $X_3^{(2)}u_{(3)}=0, X_3^{(3)}v_{(3)}=0$ 得到

$$u_{(3)}=u_{(2)}v_{(2)}=\frac{yy_2}{(y_1)^2},\quad v_{(3)}=(u_{(2)})^2v_{(2)1}=\frac{y^2[y_1y_3-2(y_2)^2]}{(y_1)^4}. \tag{3.196}$$

由此可知, ODE (3.194) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}v_{(3)}}{\mathrm{d}u_{(3)}}=F(u_{(3)},v_{(3)}),$$

其中 F 为 $u_{(3)},v_{(3)}$ 的函数. 由 $F(u_{(3)},v_{(3)})$ 有

$$\frac{\mathrm{d}v_{(3)}}{\mathrm{d}u_{(3)}}=\frac{y}{(y_1)^2}\left[\frac{y(y_1)^2y_4-7yy_1y_2y_3+2(y_1)^3y_3-4(y_1)^2(y_2)^2+8y(y_2)^3}{(y_1)^2y_2+yy_1y_3-2y(y_2)^2}\right]. \tag{3.197}$$

ODE (3.194) 能够表达为

$$y^2(y_1)^2y_4=4y(y_1)^2(y_2)^2+5y^2y_1y_2y_3-(y_1)^4y_2-3y(y_1)^3y_3-4y^2(y_2)^3. \tag{3.198}$$

将 (3.198) 代入 ODE(3.197) 得

$$\frac{\mathrm{d}v_{(3)}}{\mathrm{d}u_{(3)}}=-\frac{(y_1)^2+2yy_2}{(y_1)^2}=-(1+2u_{(3)}), \tag{3.199}$$

约化为求积分

$$v_{(3)}=-[u_{(3)}+(u_{(3)})^2+c_1]. \tag{3.200}$$

将 (3.196) 代入 (3.200), 则 (3.200) 变为

$$(u_{(2)})^2v_{(2)1}=-[u_{(2)}v_{(2)}+(u_{(2)}v_{(2)})^2+c_1]. \tag{3.201}$$

ODE (3.201) 拥有

$$X_3^{(2)}=u_{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{(2)}}-v_{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{(2)}},$$

且相应的正则变量为

$$R=u_{(2)}v_{(2)},\quad S=\log v_{(2)}.$$

因而 (3.201) 变换为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}R}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R^2-c_1}. \tag{3.202}$$

考虑常数 $c_1>0$ 的情况, 且令 $c_1=(C_1)^2$. 那么

$$S=\log R+\log\left(\frac{R-C_1}{R+C_1}\right)^{1/(2C_1)}+c_2,$$

其中 c_2 是任意常数. 从而

$$v_{(2)} = \phi(u_{(2)}; C_1, C_2) = \frac{C_1}{u_{(2)}}\left(\frac{1 + A(u_{(2)})}{1 - A(u_{(2)})}\right), \tag{3.203}$$

且 $A(u_{(2)}) = (C_2/u_{(2)})^{2C_1}$, 其中 C_1, C_2 是任意常数. 那么由 (3.203) 可得如下的一阶 ODE

$$\frac{v_{(1)1}}{v_{(1)}} = \phi(u_{(1)}; C_1, C_2), \tag{3.204}$$

其拥有 $X_2^{(1)} = -v_{(1)}\dfrac{\partial}{\partial v_{(1)}}$. 因此, ODE (3.204) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}v_{(1)}}{v_{(1)}} = \phi(u_{(1)}; C_1, C_2)\mathrm{d}u_{(1)},$$

积分可得

$$v_{(1)} = \psi(y; C_1, C_2, C_3) = C_3 \exp\left[\int^y \phi(u_{(1)}; C_1, C_2)\mathrm{d}u_{(1)}\right]. \tag{3.205}$$

最后, 一阶 ODE

$$y_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \psi(y; C_1, C_2, C_3)$$

拥有 $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, 因此约化为积分

$$\int^y \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y; C_1, C_2, C_3)} = x + C_4$$

为 ODE(3.194) 通解. 情况 $c_1 = -(C_1)^2$ 代入 (3.202) 可得 ODE(3.194) 的另一通解.

用约化算法将 n 阶 ODE 约化为 $(n-r)$ 阶 ODE 和 r 个求积分, 由 r 参数 Lie 点变换群作用下的不变性, 它的无穷小生成元构成 r 维可解 Lie 代数, 由确定不变量 $u_{(i)}, v_{(i)}, v_{(i)1}$ 和系数 $\alpha_i(u_{(i)}), \beta_i(u_{(i)}, v_{(i)}), \gamma_i(u_{(i)}, v_{(i)}, v_{(i)1})$ 得

$$\begin{aligned}&(u_{(1)}, v_{(1)}, v_{(1)1}) \to (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \to (u_{(2)}, v_{(2)}, v_{(2)1}) \to (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \to \cdots \\ &\to (u_{(r-1)}, v_{(r-1)}, v_{(r-1)1}) \to (\alpha_{r-1}, \beta_{r-1}, \gamma_{r-1}) \to (u_{(r)}, v_{(r)}).\end{aligned}$$

根据变量 $u_{(r)}, v_{(r)}$, n 阶 ODE 约化为 $(n-r)$ 阶 ODE. 求积分就是这个迭代过程的逆序.

3.4.4 具有可解 Lie 代数的 r 参数 Lie 群作用下超定常微分方程组的不变性

现在考虑两个 m 和 n 阶的超定常微分方程组 $(m \leqslant n)$

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(m)}) = 0, \tag{3.206a}$$

$$g(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{3.206b}$$

假设 ODEs(3.206a,b) 的每个方程拥有同样的具有可解 Lie 代数 L^r 的 r 参数 Lie 群, 该代数具有 r 个无穷小生成元, 满足交换关系 (3.179). 根据 3.4.3 节可知, 存在 L^r 的不变量 $u_{(r)}=u(x,y,y',\cdots,y^{(r-1)}), v_{(r)}=v(x,y,y',\cdots,y^{(r)})$, 使得 ODEs (3.206a, b) 分别约化为等价的超定方程组

$$F\left(u,v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{m-r}v}{\mathrm{d}u^{m-r}}\right)=0, \tag{3.207a}$$

$$G\left(u,v,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u},\cdots,\frac{\mathrm{d}^{n-r}v}{\mathrm{d}u^{n-r}}\right)=0, \tag{3.207b}$$

其中 F 和 G 是所含不变量的函数.

现在假设 $v=\Phi(u)$, 解方程组 (3.207a,b). 则 ODE

$$v(x,y,y',\cdots,y^{(r)})=\Phi(u(x,y,y',\cdots,y^{(r-1)}) \tag{3.208}$$

的任意解解给定的方程组 (3.206a,b). 如果 $\Phi(u)$ 依赖 $m-r$ 个基本常数, 那么可得常微分方程组 (3.206a,b) 的通解. 因为 u 和 v 是 L^r 的不变量, 由此可知 ODE(3.208) 在 L^r 作用下也是不变的. 因此, 原则上, ODE (3.208) 可以构造性地约化为具有 r 个基本常数 $c_1,\cdots,c_r$ 的 r 个求积分. 因而可得函数 $\Psi(x,y;c_1,\cdots,c_r)$, 对于它, 方程

$$\Psi(x,y;c_1,\cdots,c_r)=0 \tag{3.209}$$

产生超定 ODEs (3.206a,b) 的显式解.

已经假设常微分方程组 (3.206a,b) 的解满足

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\frac{(v_x+v_yy'+\cdots+v_{y^{(r-1)}}y^{(r)})}{(u_x+u_yy'+\cdots+u_{y^{(r-1)}}y^{(r)})}\neq 0.$$

另外, 常微分方程组 (3.206a,b) 的解能够通过考虑

$$u=A, \tag{3.210a}$$

$$v=B \tag{3.210b}$$

得到, 其中 A 和 B 是常数. 由 (3.210a,b), 常微分方程组 (3.206a,b) 的解满足常微分方程组

$$u(x,y,y',\cdots,y^{(r-1)})=A, \tag{3.211a}$$

$$v(x,y,y',\cdots,y^{(r)})=B. \tag{3.211b}$$

因为常微分方程组 (3.211a,b) 在 L^r 的无穷小生成元作用下保持不变, 由此可得 (3.211a,b) 的解构造性地约化为积分. 因此, 能够发现常微分方程组 (3.211a,b) 的所有解.

最重要的, 不需要首先确定这些 ODEs 的任一通解, 上面的考虑能够产生常微分方程组 (3.206a,b) 的解.

当研究非齐次媒介中波方程的不变性性质时, 得到了常微分方程组, 作为例子, 考虑该常微分方程组:

$$[yy'(y(y')^{-1})'']' = 0, \tag{3.212a}$$

$$\Big\{y^2\Big[\frac{(y^{-1}y')'''}{2(y^{-1}y')' + (y^{-1}y')^2} + 3\frac{[2(y^{-1}y')^3 - 2(y^{-1}y')(y^{-1}y')'(y^{-1}y')'' - ((y^{-1}y')'')^2]}{[2(y^{-1}y')' + (y^{-1}y')^2]^2}\Big]\Big\}' = 0, \tag{3.212b}$$

其中 $y(x)$ 为波速.

我们知道, 四阶 ODE (3.212a) (参看 (3.194)) 拥有 3 参数 Lie 变换群 (3.195a,b), 且无穷小生成元为 $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$ 和 $X_3 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$. 五阶 ODE (3.212b) 也拥有同样的群. 从而, 超定的常微分方程组 (3.212a,b) 拥有可解的 3 参数 Lie 点变换群 (3.195a,b). 方便地, 这个 3 参数群的微分不变量可取为

$$u = \frac{yy''}{(y')^2}, \tag{3.213a}$$

$$v = \frac{y^2y'''}{(y')^3}. \tag{3.213b}$$

从而, ODEs(3.212a,b) 分别约化为 ODEs

$$(2u^2 - u - v)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} - 2u + 1\right) = 0 \tag{3.214a}$$

和

$$2u\Gamma + \left(\Gamma_u + \Gamma_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} + \Gamma_{v_1}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2}\right)(u + v - 2u^2) = 0, \tag{3.214b}$$

且

$$\Gamma(u, v, v_1) = (1-u) + \frac{(u + v - 2u^2)v_1 + (2u^2 - 3uv - 9u + 6v + 4)}{2u - 1} + 3\frac{(v - 2u + 1)^2}{(2u - 1)^2},$$

其中 $v_1 = \mathrm{d}v/\mathrm{d}u$.

由 (3.214a) 可知, 存在下面的两种情况:

$$v = 2u^2 - u, \tag{3.215}$$

$$v = u^2 - u + \delta, \quad \delta = \text{const}. \tag{3.216}$$

现在, 分别确定 (3.125) 和 (3.124b) 以及 (3.126) 和 (3.124b) 之间的相容性.

情况 I. $v - 2u^2 - u$.

容易验证 (3.214b) 恒成立, 使得得到常微分方程组 (3.212a,b) 的解为 $v = \Phi_1(u) = 2u^2 - u$, 根据微分不变量, 该解产生三阶 ODE

$$\frac{y^2 y'''}{(y')^3} = 2\frac{y^2 (y'')^2}{(y')^4} - \frac{yy''}{(y')^2}. \tag{3.217}$$

ODE (3.217) 一定拥有可解群 (3.195a,b). 易知, ODE (3.217) 能够表示为 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 0$, 因而有

$$u = \frac{yy''}{(y')^2} = \text{const} = \lambda.$$

由该方程容易知道, ODE (3.217) 的通解为

$$y = (c_1 + c_2 x)^{c_3}, \tag{3.218}$$

其产生常微分方程组 (3.212a,b) 的 3 参数的解族.

情况 II. $v = u^2 - u + \delta$.

将 (3.216) 代入 (3.214b) 得到相容方程

$$(u^2 - \delta)(1 - 4\delta) = 0. \tag{3.219}$$

现在令 (3.219) 中每个因子为零. 显然, 第一个因子又产生解 (3.218). 第二个因子产生 $\delta = 1/4$, 使得得到常微分方程组 (3.214a,b) 的所有其他解为$v = \Phi_2(u) = u^2 - u + \dfrac{1}{4}$. 根据 (3.213a,b) 的微分不变量, 这对应于 ODE

$$\frac{y^2 y'''}{(y')^3} = \frac{y^2 (y'')^2}{(y')^4} - \frac{yy''}{(y')^2} + \frac{1}{4} \tag{3.220}$$

的所有解.

从而可知, ODE(3.220) 一定拥有可解的 3 参数 Lie 群 (3.195a,b), 因而可以完全约化为求积分. 作为这个 3 参数群的微分不变量, 方便地选择

$$U = y', \quad V = yy''. \tag{3.221}$$

因而, ODE (3.220) 约化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = \frac{V}{U} + \frac{U^3}{4V}.$$

由尺度不变性, 它的通解为

$$V^2 = \frac{1}{4}U^4 + \alpha U^2, \quad \alpha = \text{const}. \tag{3.222}$$

由微分不变量 (3.221) 知 $V = yU\mathrm{d}U/\mathrm{d}y$, 因此, (3.222) 变为一阶 ODE

$$y^2\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\right)^2 = \frac{1}{4}U^2 + \alpha, \tag{3.223}$$

(3.223) 是关于 y 的尺度作用下的不变量. 根据 $y' = U$, 对于两个任意常数 β 和 $\gamma > 0$, 由 (3.223) 的积分得到两个常微分方程族

$$y' = \beta[(\gamma y)^{1/2} \pm (\gamma y)^{-1/2}]. \tag{3.224}$$

ODE (3.224) 的解产生给定常微分方程组 (3.216a,b) 的两个更多的 3 参数解族:

$$\sqrt{y} - \arctan(c_1\sqrt{y}) = c_2(x + c_3) \tag{3.225}$$

和

$$\sqrt{y} + \log\left|\frac{\sqrt{y} - c_1}{\sqrt{y} + c_1}\right|^{1/2} = c_2(x + c_3). \tag{3.226}$$

因此, 常微分方程组 (3.214a,b) 的所有解为 (3.218), (3.225) 和 (3.226). 寻找所有的常微分方程组 (3.214a,b) 满足常微分方程组 (3.217) 和 (3.220), 即求所有的解位于满足 (3.218) 和 (3.225) 或 (3.226) 的函数族的交集上的解.

关于这部分内容的详细工作见文献 (Bluman, Kumei, 1989a).

习　题　3.4

1. 对于下面每个二阶 ODEs, 寻找所拥有的 2 参数 Lie 点变换群, 且用适当的微分不变量求 ODEs 的通解:

(a) $y'' + Ay' + By + C = 0$, 这里 A, B, C 为常数;

(b) $y'' + \dfrac{A}{x}y' + \dfrac{B}{x^2}y = 0$, 这里 A, B 为常数;

(c) $(x^2 + y^2)y'' + 2(y - xy')(1 + (y')^2) = 0$;

(d) $yy'' + (y')^2 = 1$;

(e) $y'' + \dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy} = 0$.

2. 对于下面每个 2 参数 Lie 变换群, 其 Lie 代数由集合 $\{X_1, X_2\}$ 生成, 求所有拥有的二阶和三阶 ODEs:

(a) $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}$;

(b) $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x}, X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(c) $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}, X_2 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(d) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}$;

(e) $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

3. 考虑四阶 ODE (3.194), 且在 3 参数 Lie 点变换群 (3.195a,b) 作用下是不变的.

(a) 证明: 如果 $X_1 = y\frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, X_3 = x\frac{\partial}{\partial x}$, 则形式 (3.179) 的交换关系成立. 相应地, 通过约化算法求解 ODE (3.194).

(b) 当用 $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}, X_3 = \frac{\partial}{\partial x}$ 的算法时, 结果如何?

4. 令 $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ 是 n 阶线性齐次 ODE

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0.$$

的 n 个线性无关的解.

(a) 求 n 阶线性非齐次 ODE

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g(x) \tag{3.227}$$

拥有的 n 参数 Lie 点变换群. 证明: 相应的 Lie 代数是可解的.

(b) 用群不变性获得 ODE(3.227) 的通解. 特别地, 通过参数变分法求已知公式.

5. 二阶超定常微分方程组

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \tag{3.228a}$$

$$yy'' - 2(y')^2 = 0 \tag{3.228b}$$

拥有 $X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, X_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$. 用对应于

(a) X_1;

(b) X_2;

(c) $\{X_1, X_2\}$

的微分不变量的三种途径求常微分方程组 (3.228a,b) 的通解.

6. 求由 ODEs(3.217) 和 (3.220) 构成的超定系统的通解.

7. 证明: 如果 r 维 Lie 代数是可解的, 则无穷小生成元 $\{X_1, X_2, \cdots, X_r\}$ 的生成 (基) 集合使得交换关系 (3.179) 成立.

8. (a) 令二阶 ODE 拥有 2 参数 Lie 变换群且无穷小生成元为 X_1, X_2, 使得 $[X_1, X_2] = 0$, 即 Lie 代数是 Able 的. 假设 "正则坐标" $R(x,y), S(x,y)$ 可以使得

$$X_1R = 1, \quad X_2R = 0, \quad X_1S = 0, \quad X_2S = 1. \tag{3.229}$$

将给定的 ODE 变换为 (R,S) 坐标, 且约化它为两个求积分.

(b) 证明：如果作用在 R^2 上的 2 参数 Lie 变换群的 Lie 代数是 Able 的, 则并不一定存在 "正则坐标" $R(x,y),S(x,y)$ 满足关系 (3.229). 从几何角度给出解释, 并举例.

9. 求拥有 3 参数群且无穷小生成元为

$$X_1=(1+x^2)\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\quad X_2=xy\frac{\partial}{\partial x}+(1+y^2)\frac{\partial}{\partial y},\quad X_3=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\tag{3.230}$$

的最一般的二阶和三阶 ODEs. 注意相应的 Lie 代数是不可解的 (看习题 2.5.13).

3.5　接触对称和高阶对称

现在考虑接触变换 $(n\geqslant 2)$ 和高阶局部变换 $(n\geqslant 3)$ 作用下 n 阶 ODE 的不变性 (参看 2.7.2 节).

定义 3.5.1　二阶或高阶 ODE

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\quad n\geqslant 2\tag{3.231}$$

拥有单参数局部变换群

$$x^*=x,$$
$$y^*=y+\varepsilon\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})+O(\varepsilon^2),\tag{3.232}$$

且无穷小生成元为

$$\hat{X}=\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})\frac{\partial}{\partial y}\tag{3.233}$$

当且仅当 (3.232) 将 ODE (3.231) 的任意解 $y=\Theta(x)$ 映成它的解 $y=\Theta^*(x)=\left.(\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}^{(\infty)}}y)\right|_{y=\Theta(x)}$, 其中 $\hat{X}^{(\infty)}$ 是无穷小生成元 (2.212).

特别地, 群 (3.232) 使得 ODE(3.231) 保持不变当且仅当曲线 $y=\Theta^*(x)=\left.(\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}^{(\infty)}}y)\right|_{y=\Theta(x)}$ 是 ODE (3.231) 的解, 且当曲线 $y=\Theta(x)$ 也满足 ODE (3.231). 出现在 $\hat{\eta}$ 中 y 的导数的最高阶 y 称为局部变换 (3.232) 的阶.

定义 3.5.2　ODE (3.231) 拥有的单参数 $0\leqslant\ell\leqslant n-1$ 阶的局部变换群 (3.232) 是 (3.231) 的 ℓ 阶的对称.

当 $\ell=1$ 时, 如果 $\hat{\eta}(x,y,y')$ 是 y' 的线性函数, 那么局部变换 (3.232) 为 ODE (3.231) 的点对称. 特别地,

$$\hat{X}=[\eta(x,y)-\xi(x,y)y']\frac{\partial}{\partial y}\ 和\ X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

对于 ODE (3.231) 的解 $y=\Theta(x)$ 具有同样的作用. 更一般地, 如果 $\hat{\eta}(x,y,y')$ 不是 y' 的线性函数, 那么局部变换 (3.232) ($\ell=1$) 为 ODE(3.231) 的接触对称. 当 $\ell\geqslant 2$ 时, 局部变换 (3.232) 是 ODE(3.231) 的高阶对称 (参看 2.7.2 节). (3.232) 的无穷小 $\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})$ 称为对称特征.

我们将说明如何求给定的 n 阶 ODE($n\geqslant 2$) 的接触对称和高阶对称. 正如一阶 ODE 的点对称情况, 当 $\ell=n-1$ 时, $n-1$ 阶对称的无穷小 $\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 满足线性齐次 PDE, 它的通解不能够得到, 除非知道 ODE 自身的通解. 然而, 当 $\ell<n-1$ 时, 一般来说, 无穷小 $\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})$ 的确定方程可以分成超定线性齐次偏微分方程组, 其仅拥有有限个线性无关的解.

最重要的, 我们将从新给出的关于阶的约化微分不变量法的公式, 其允许这种方法拓展到接触和高阶对称的情况.

3.5.1 接触对称和高阶对称的确定方程

我们给出单参数 $0\leqslant\ell\leqslant n-1$ 阶局部变换群 (3.232) 作用下 n 阶 ODE(3.231) 的不变性的无穷小准则.

几何学上, 作用在给定 ODE(3.231) 的解空间上的无穷小生成元 (3.233) 对应于向量场为 $\hat{X}^{(n)}$, 切于 $(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 空间中 (3.231) 所定义的曲面

$$y_n=f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}),\tag{3.234}$$

向量场 $\hat{X}^{(n)}$ 为

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(n)}&=\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y}+D\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+D^n\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y_n},\quad \text{在 } y_n=f \text{ 上}\\&=\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y}+D\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+D^n\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y_n},\end{aligned}\tag{3.235}$$

其中

$$\hat{\eta}=\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell),\quad D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+\cdots+y_n\frac{\partial}{\partial y_{n-1}},$$

且

$$D=D|_{y_n=f}=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+\cdots+y_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-2}}+f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}\tag{3.236}$$

是与曲面 (3.234) 有关的全导数. 因为 (3.235) 是切向量场, 所以它是曲面 (3.234) 上的单参数 Lie 局部变换群

$$x^*=x,\tag{3.237a}$$

$$y^*=\mathrm{e}^{\varepsilon\hat{X}(n)}y,\tag{3.237b}$$

$$y_j^* = \mathrm{e}^{\varepsilon \hat{X}^{(n)}} y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{3.237c}$$

$$y_n^* = \mathrm{e}^{\varepsilon \hat{X}^{(n)}} y_n = f(x, y^*, y_1^*, \cdots, y_{n-1}^*) \tag{3.237d}$$

的无穷小生成元. ODE(3.231) 的解 $y = \Theta(x)$ 满足

$$\Theta^{(n)}(x) = f(x, \Theta(x), \Theta'(x), \cdots, \Theta^{(n-1)}(x)),$$

表示曲面 (3.234) 上的曲线, 且 $y = \Theta(x), y_j = \Theta^{(j)}(x), j = 1, 2, \cdots, n$. 如果 ODE (3.231) 的解曲线 $y = \Theta(x)$ 在变换群 (3.237a~d) 作用下不是它自身的不变量, 那么对任意的参数 ε, 它被映成 ODE (3.231) 的另一解曲线 $y = \phi(x;\varepsilon) = (\mathrm{e}^{\varepsilon \hat{X}^{(n)}} y)\Big|_{y=\Theta(x)}$.

定义 3.5.1.1 n 阶 ODE (3.231) 在单参数局部变换群 (3.232) 作用下是不变的, 当且仅当 $(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 空间上的相应曲面 (3.234) 拥有单参数 Lie 变换群 (3.237a~d).

由定义 3.5.2 和定义 3.5.1.1 以及关于不变曲面的无穷小准则的定理 2.6.7.1, 有下面的定理:

定理 3.5.1.1 (ODE 不变性的无穷小准则) 向量场 (3.235) 是 n 阶 ODE(3.231) 所拥有的 $\ell < n$ 阶对称的无穷小生成元, 当且仅当

$$\hat{X}^{(n)}(y_n - f) = 0, \tag{3.238}$$

或等价于

$$D^n \hat{\eta} = f_y \hat{\eta} + f_{y_1} D\hat{\eta} + \cdots + f_{y_{n-1}} D^{n-1} \hat{\eta}. \tag{3.239}$$

方程 (3.239) 称为 ODE (3.231) 的对称确定方程, 且它的解 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 n 阶 ODE (3.231) 或等价的曲面 (3.234) 所拥有的直到 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶的对称特征.

因为对任意 n 阶 ODE, 对任一 x 的值, 可以给每个 $y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 赋予任意值, 所以对称确定方程 (3.239) 是 $\hat{\eta}$ 的线性齐次 PDE, 且自变量为 $x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}$. 如果 $l = n-1$, 那么不能得到 (3.239) 的通解, 除非知道给定 ODE(3.231) 的通解. 然而, 如果 $l < n-1$, 那么对称确定方程 (3.239) 约化为超定的线性齐次偏微分方程组, 且含有有限个关于 $\hat{\eta}$ 的线性无关解. 存在有效的计算方法来求解这样的系统 (参看文献 (Head, 1992; Hereman, 1996; Wolf, 2002a)), 特别地, 虽然当阶 l 增加时, 计算的复杂度迅速递增, 但是这里的解可以显式地得到.

如果给定 n 阶 ODE (3.231) 拥有点对称, 那么可以作简单的假设, 通过求解对称确定方程 (3.239) 来获得高阶对称. 特别地, 如果 ODE (3.231) 拥有尺度对称 $x \to \alpha^q x, y \to \alpha^p y$, 那么对称确定方程 (3.239) 拥有尺度对称

$$\hat{\eta} \to \alpha^r \hat{\eta}, x \to \alpha^q x, y \to \alpha^p y, y_1 \to \alpha^{p-q} y_1, \cdots, y_{n-1} \to \alpha^{p-(n-1)q} y_{n-1},$$

其中 r 是任意常数. 于是, 可以求得对称确定方程 (3.239) 的如下形式的不变解

$$\hat{\eta} = x^r g\left(\frac{y^q}{x^p}, \frac{(y_1)^q}{x^{p-q}}, \cdots, \frac{(y_{n-1})^q}{x^{p-(n-1)q}}\right).$$

因而, 根据尺度不变变量 $y^q/x^p, (y_1)^q/x^{p-1}, \cdots, (y_{n-1})^q/x^{p-(n-1)q}$, (3.239) 约化为超定的线性偏微分方程组. 类似地, 如果 ODE (3.231) 拥有平移对称

$$x \to x+\varepsilon, y \to y, \quad \text{或 } x \to x,\ y \to y+\varepsilon,$$

那么对称确定方程 (3.239) 拥有平移对称

$$x \to x+\varepsilon, \quad y \to y, \text{ 或 } x \to x, y \to y+\varepsilon, y_1 \to y_1, \cdots, y_{n-1} \to y_{n-1},$$

且尺度对称 $\hat{\eta} \to \alpha^r \hat{\eta}$ (r 为任意常数), 从而, 可以求得对称确定方程 (3.239) 的如下形式的不变解

$$\hat{\eta} = \mathrm{e}^{rx} g(y, y_1, \cdots, y_{n-1}) \quad \text{或 } \hat{\eta} = \mathrm{e}^{ry} g(x, y_1, \cdots, y_{n-1}),$$

根据平移不变变量 $y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 或 $x, y_1, \cdots, y_{n-1}$, 可将 (3.239) 约化为超定的线性偏微分方程组.

更一般地, 如果可以发现对称确定方程 (3.239) 的点对称 $\widetilde{X}$ (不一定是给定 ODE (3.231) 拥有的点对称), 那么, 通过用拥有的点对称

$$\begin{aligned}\widetilde{X} =& \widetilde{\xi}(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})\frac{\partial}{\partial x} + \widetilde{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y} + \widetilde{\eta}_1(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_1} \\ &+ \cdots + \widetilde{\eta}_{n-1}(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}.\end{aligned}$$

根据由 $\widetilde{X} u_i(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = 0$ 所确定 n 个不变量 $u_1, \cdots, u_n$, 可以考虑相应的假设 $\widetilde{X}\hat{\eta} = r\hat{\eta}$ 求不变解 $\hat{\eta}$, 其中 r 是任意常数.

通过正则坐标 (参看 3.5.2 节) 能够表明, 对称确定方程 (3.239) 拥有的点对称包括给定 ODE (3.231) 拥有的所有点对称. 假设 $\widetilde{X}\hat{\eta} = r\hat{\eta}$ 的应用将在 3.5.2 节的例子中展示.

3.5.2 接触对称和高阶对称举例

1. 接触对称

作为第一个例子, 考虑初等的三阶线性 ODE

$$y''' = 0, \tag{3.240}$$

其对应于 $y_3=0$ 在 (x,y,y_1,y_2,y_3) 空间上的曲面. ODE (3.240) 拥有的接触对称 $\hat{\eta}(x,y,y_1)$ 的对称确定方程 (3.239) 为

$$\begin{aligned}D^3\hat{\eta}=&\hat{\eta}_{xxx}+3y_1\hat{\eta}_{xxy}+3(y_1)^2\hat{\eta}_{xyy}+(y_1)^3\hat{\eta}_{yyy}\\&+3[\hat{\eta}_{xxy_1}+2y_1\hat{\eta}_{xyy_1}+(y_1)^2\hat{\eta}_{yyy_1}+\hat{\eta}_{xy}+y_1\hat{\eta}_{yy}]y_2\\&+3[\hat{\eta}_{xy_1y_1}+y_1\hat{\eta}_{yy_1y_1}+\hat{\eta}_{yy_1}](y_2)^2+\hat{\eta}_{y_1y_1y_1}(y_2)^3=0,\end{aligned} \tag{3.241}$$

其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

考虑 y_2 的幂的系数, PDE(3.241) 分成超定的线性系统

$$\hat{\eta}_{xxx}+3y_1\hat{\eta}_{xxy}+3(y_1)^2\hat{\eta}_{xyy}+(y_1)^3\hat{\eta}_{yyy}=0, \tag{3.242a}$$

$$\hat{\eta}_{xxy_1}+2y_1\hat{\eta}_{xyy_1}+(y_1)^2\hat{\eta}_{yyy_1}+\hat{\eta}_{xy}+y_1\hat{\eta}_{yy}=0, \tag{3.242b}$$

$$\hat{\eta}_{xy_1y_1}+y_1\hat{\eta}_{yy_1y_1}+\hat{\eta}_{yy_1}=0, \tag{3.242c}$$

$$\hat{\eta}_{y_1y_1y_1}=0. \tag{3.242d}$$

直接求解 (3.242a~d), 可得 3 个接触对称

$$\hat{\eta}_1=(y_1)^2,\quad \hat{\eta}_2=(2y-xy_1)y_1,\quad \hat{\eta}_3=(2y-xy_1)^2 \tag{3.243}$$

和 7 个点对称

$$\hat{\eta}_4=1,\quad \hat{\eta}_5=x,\quad \hat{\eta}_6=x^2,\quad \hat{\eta}_7=y,\quad \hat{\eta}_8=y_1,\quad \hat{\eta}_9=xy_1,\quad \hat{\eta}_{10}=2xy-x^2y_1. \tag{3.244}$$

作为第二个例子, 考虑三阶非线性 ODE

$$y'''=6x\frac{(y'')^3}{(y')^2}+6\frac{(y'')^2}{y'}, \tag{3.245}$$

或等价于 (x,y,y_1,y_2,y_3) 空间上的曲面 $y_3=6x(y_2)^3(y_1)^{-2}+6(y_2)^2(y_1)^{-1}$, 拥有尺度对称 $x\to\alpha x,y\to\beta y$ 和平移对称 $x\to x,y\to y+\varepsilon$. 对于 ODE (3.245), 关于 $\hat{\eta}(x,y,y_1)$ 的接触对称确定方程 (3.239) 变为

$$D^3\hat{\eta}-18x(y_2)^2(y_1)^{-2}D^2\hat{\eta}+12x(y_2)^3(y_1)^{-3}D\hat{\eta}-12y_2(y_1)^{-1}D^2\hat{\eta}+6(y_2)^2(y_1)^{-2}D\hat{\eta}=0, \tag{3.246}$$

且 $\hat{\eta}_{y_1y_1}\neq 0$, 其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}+6(xy_2+y_1)(y_2)^2(y_1)^{-2}\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

易知, (3.246) 是 y_2 的三次多项式, 因而可分成四个三阶线性偏微分方程组. 除了直接求通解, 基于给定 ODE (3.245) 拥有的点对称的不变量, 也可以用假设求解.

首先, 因为 (3.245) 拥有关于 y 的平移, 求具有如下形式的接触对称确定方程 (3.246)

$$\hat{\eta} = \mathrm{e}^{py} g(x, y_1), \quad p = \mathrm{const} \tag{3.247}$$

的解, 且 $g_{y_1 y_1} \neq 0$. 简单地, 最初选择 $p = 0$. 将 (3.247) 代入 (3.246) 得到线性偏微分方程组

$$g_{xxx} = 0, \tag{3.248a}$$

$$y_1 g_{xxy_1} - 4g_{xx} = 0, \tag{3.248b}$$

$$2g_x - 6xg_{xx} - 2y_1 g_{xy_1} + (y_1)^2 g_{xy_1y_1} = 0, \tag{3.248c}$$

$$12xg_x - 18xy_1 g_{xy_1} + 6y_1 g_{y_1} + 6(y_1)^2 g_{y_1y_1} + (y_1)^3 g_{y_1y_1y_1} = 0. \tag{3.248d}$$

解 (3.248a~d) 得到

$$g = c_1 + c_2(y_1)^{-1} + c_3(y_1)^{-2} + c_4 x y_1 + c_5 x(y_1)^2 + c_6 x^2 (y_1)^4,$$

其中 c_i 是任意常数. 由 $g(x, y_1)$ 的线性偏微分方程组的相容性, 不难证明, 当 $p \neq 0$ 时, 接触对称确定方程 (3.246) 并没有 (3.247) 形式的解. 因而, 假设 (3.247) 产生四个接触对称

$$\hat{\eta}_1 = (y_1)^{-1}, \quad \hat{\eta}_2 = (y_1)^{-2}, \quad \hat{\eta}_3 = x(y_1)^2, \quad \hat{\eta}_4 = x^2(y_1)^4. \tag{3.249}$$

下面用给定的 ODE (3.245) 拥有的 x 和 y 的尺度, 求 (3.246) 如下形式的解

$$\hat{\eta} = x^q y^p g(z), \tag{3.250}$$

其中 $z = xy^{-1}y_1$, $p, q =$ 常数, 且 $g''(z) \neq 0$. 将 (3.250) 代入接触对称确定方程 (3.246) 得到关于 $g(z)$ 超定的线性方程组, 其含有四个三阶常微分方程. 由这个超定系统的相容条件可得如下解

$$g = 9z^2 - 12z + 4, \quad q = 0, p = 2, \tag{3.251a}$$

$$g = 3 - 2z^{-1}, \quad q = 1, p = 0, \tag{3.251b}$$

$$g = 3z^3 - 2z^2, \quad q = -1, p = 3. \tag{3.251c}$$

因此, 假设 (3.250) 产生额外三个 ODE(3.245) 拥有的接触对称

$$\hat{\eta}_5 = 9x^2(y_1)^2 - 12xyy_1 + 4y^2, \quad \hat{\eta}_6 = 3x - 2y(y_1)^{-1}, \quad \hat{\eta}_7 = 3x^2(y_1)^3 - 2xy(y_1)^2. \tag{3.252}$$

更一般地, 通过分析由 ODE (3.245) 的接触对称确定方程 (3.246) 所得到的超定线性偏微分方程组能够证明, 利用假设 (3.247) 和 (3.250) 可以求得 (3.246) 的所有解 $\hat{\eta}(x, y, y_1)$. 因而, ODE (3.245) 拥有的接触对称由 (3.249) 和 (3.252) 构成.

作为最后的例子, 考虑 Blasius 方程

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0, \tag{3.253}$$

其相应于 (x, y, y_1, y_2, y_3)空间的曲面 $y_3 = -\frac{1}{2}yy_2$, ODE (3.253) 拥有的接触对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1)$ 的对称确定方程 (3.239) 为

$$D^3\hat{\eta} + \frac{1}{2}y_2\hat{\eta} + yD^2\hat{\eta} = 0, \tag{3.254}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{2}yy_2\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

因而, (3.245) 是关于 y_2 的三次多项式, 因此, 可以分成超定的含有四个线性偏微分方程的系统. 由 (3.254) 中 $(y_2)^3$ 的系数有

$$\hat{\eta}_{y_1y_1y_1} = 0, \tag{3.255}$$

所以 x, y 对某些函数 α, β, γ, 有

$$\hat{\eta} = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y_1 + \gamma(x, y)(y_1)^2. \tag{3.256}$$

从而 (3.254) 变为关于的多项式. 因此, 由 (3.254) 中 $y_1(y_2)^2, (y_2)^2$ 和 $(y_1)^2y_2$ 的系数分别得到方程

$$\gamma_y = 0, \quad \beta_y = \frac{2}{3}\gamma - 2\gamma_x, \quad \gamma = 12\beta_{yy}.$$

由这些方程易知 $\gamma = 0$, 因而, $\hat{\eta}$ 至多是关于 y_1 的线性函数. 因此, Blasius 方程 (3.253) 并不拥有接触对称.

2. 高阶对称

考虑四阶 ODE

$$y^{(4)} = \frac{4}{3}\frac{(y''')^2}{y''}, \tag{3.257}$$

或等价于 $(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 空间上的曲面 $y_4 = \frac{4}{3}(y_3)^2(y_2)^{-1}$, 其拥有尺度对称 $x \to$

$\alpha x, y \to \beta y$ 和平移对称 $x \to x+\varepsilon_1, y \to y+\varepsilon_2$. ODE(3.257) 拥有的二阶对称 $\hat{\eta}(x,y,y_1,y_2)$ 的对称确定方程 (3.239) 为

$$D^4\hat{\eta} - \frac{8}{3}y_3(y_2)^{-1}D^3\hat{\eta} + \frac{4}{3}(y_3)^2(y_2)^{-2}D^2\hat{\eta} = 0, \tag{3.258}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{4}{3}(y_3)^2(y_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

PDE (3.258) 是 y_3 的四次多项式. $(y_3)^4$ 的系数产生方程

$$(y_2)^3\hat{\eta}_{y_2y_2y_2y_2} + \frac{16}{3}(y_2)^2\hat{\eta}_{y_2y_2y_2} + \frac{44}{9}y_2\hat{\eta}_{y_2y_2} + \frac{8}{27}\hat{\eta}_{y_2} = 0, \tag{3.259}$$

有通解

$$\hat{\eta} = (y_2)^{-1/3}\alpha(x,y,y_1) + (y_2)^{2/3}\beta(x,y,y_1) + (y_2)^{1/3}\gamma(x,y,y_1) + \kappa(x,y,y_1), \tag{3.260}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\kappa$ 为 x,y,y_1 的函数. 如果通过 y_2 的幂分解对称确定方程 (3.258), 关于 $(y_2)^{1/3}$ 的 (3.258) 分成分离方程. 根据 $(y_3)^3$ 的系数可得

$$y_1\alpha_y + \alpha_x = 0, \quad \beta_{y_1} = 0, \quad \gamma_{y_1} = 0, \tag{3.261}$$

因而 $\alpha = \alpha(z,y_1), \beta = \beta(x,y), \gamma = \gamma(x,y)$, 其中 $z = xy_1 - y$.

由剩余的 y_3 的幂的系数可得

$$\alpha = a_0 + a_1y_1 + a_2z, \tag{3.262a}$$

$$\beta = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3, \tag{3.262b}$$

$$\gamma = c_0 + c_1x + c_2y + c_3xy + c_4x^2, \tag{3.262c}$$

$$\kappa = k_0 + k_1y + k_2x + k_3y_1 + k_4xy_1, \tag{3.262d}$$

其中 a_i,b_i,c_i,k_i 是任意常数. 从而, 四阶 ODE (3.257) 拥有 12 个二阶对称

$$\hat{\eta}_1 = (y_2)^{-1/3}, \quad \hat{\eta}_2 = y_1(y_2)^{-1/3}, \quad \hat{\eta}_3 = (xy_1 - y)(y_2)^{-1/3}, \quad \hat{\eta}_4 = (y_2)^{2/3},$$

$$\hat{\eta}_5 = x(y_2)^{2/3}, \quad \hat{\eta}_6 = x^2(y_2)^{2/3}, \quad \hat{\eta}_7 = x^3(y_2)^{2/3}, \quad \hat{\eta}_8 = (y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_9 = x(y_2)^{1/3},$$

$$\hat{\eta}_{10} = x^2(y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_{11} = xy(y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_{12} = y(y_2)^{1/3}. \tag{3.263}$$

值得注意的是, ODE (3.257) 也拥有五个点对称对应于 (3.262d), 但不拥有接触对称.

作为第二个例子, 考虑四阶 ODE

$$(yy'(y(y')^{-1})'')' = 0, \tag{3.264}$$

其源于具有波速 $y(x)$ 的波方程的不变性. $(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 空间上 ODE (3.264) 所表示的曲面为

$$y_4 = f(y, y_1, y_2, y_3) = 5(y_1)^{-1}y_2y_3 - 3y^{-1}y_1y_3 - y^{-2}(y_1)^2y_2 + 4y^{-1}(y_2)^2 - 4(y_1)^{-2}(y_2)^3. \tag{3.265}$$

ODE (3.264) 所拥有的二阶对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, y_2)$ 的对称确定方程为

$$\begin{aligned} &D((y_1\hat{\eta} + yD\hat{\eta})(2y(y_1)^{-3}(y_2)^2 - (y_1)^{-1}y_2 - y(y_1)^{-2}y_3) \\ &+yy_1D^2((y_1)^{-1}\hat{\eta} - y(y_1)^{-2}D\hat{\eta})) = 0, \end{aligned} \tag{3.266}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + f(y, y_1, y_2, y_3)\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

不难发现 (3.266) 是关于 y_3 的四次多项式. $(y_3)^4$ 的系数产生方程

$$\hat{\eta} = \alpha(x, y, y_1) + \beta(x, y, y_1)y_2 + \gamma(x, y, y_1)(y_2)^2 + \kappa(x, y, y_1)(y_2)^3, \tag{3.267}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$ 为 x, y, y_1 的函数. 由 (3.266) 中 $y_2(y_3)^3$ 和 $(y_2)^3(y_3)^2$ 的系数可得

$$y_1\kappa_{y_1} + 4\kappa = 0, \tag{3.268}$$

$$25(y_1)^2\kappa_{y_1y_1} + 135y_1\kappa_{y_1} + 56\kappa = 0. \tag{3.269}$$

由 (3.268) 和 (3.269) 之间的相容性可得

$$\kappa = 0.$$

类似地, 由 (3.266) 中 $(y_3)^3, (y_2)^2(y_3)^2, y_2(y_3)^2, (y_2)^3y_3$ 的系数可得

$$\gamma = \beta = 0.$$

因而, ODE (3.264) 并不拥有二阶对称. 最后, 对于 $\hat{\eta} = \alpha(x, y, y_1)$, 直接证明, 由 (3.266) 中的系数 $(y_3)^3, (y_3)^2, y_3$ 可得

$$\alpha = a_0 + a_1y + a_2y_1 + a_3xy_1,$$

其中 a_i 是任意常数. 因此, ODE (3.264) 拥有四个点对称, 由 x 和 y 的平移与 x 和 y 的尺度构成, 但不拥有接触对称.

3.5.3 利用具有特征形式的点对称实现阶的约化

考虑由曲面给定的二阶 ODE

$$F(x, y, y_1, y_2) = y_2 - f(x, y, y_1) = 0. \tag{3.270}$$

假设其有具有一阶延拓的无穷小生成元

$$X^{(1)} = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}(x, y, y_1)\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{3.271}$$

的单参数 Lie 点变换群, 其中 $\eta^{(1)} = D\eta - y_1 D\xi$ 和

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

在 3.3.2 节中, 根据无穷小生成元 (3.271) 的不变量 $u(x, y), v(x, y, y_1)$, 证明了如何将 (3.270) 构造性地约化为具有形式 $\mathrm{d}v/\mathrm{d}u = H(u, v)$ 的一阶 ODE. 特别地, u 和 v 是由求解特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\xi} = \frac{\mathrm{d}y}{\eta} = \frac{\mathrm{d}y_1}{D\eta - y_1 D\xi} \tag{3.272}$$

的积分常数确定的, 该方程由

$$X^{(1)}u(x, y) = \xi u_x + \eta u_y = 0, \tag{3.273a}$$

$$X^{(1)}v(x, y, y_1) = \xi v_x + \eta v_y + (D\eta - y_1 D\xi)v_{y_1} = 0, \quad v_{y_1} \neq 0 \tag{3.273b}$$

得到. 现在, 根据由具有特征形式的无穷小生成元

$$\hat{X}^{(1)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad F = 0 \tag{3.274}$$

所得到的不变量展示 ODE (3.270) 的阶的类似约化, 其中

$$\hat{\eta} = \eta - y_1\xi, \quad \hat{\eta}^{(1)} = D\hat{\eta} = D\eta - y_1 D\xi - f\xi, \quad F = 0, \tag{3.275}$$

且 $D = \dfrac{\partial}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial}{\partial y} + f\dfrac{\partial}{\partial y_1}$.

因为 (3.274) 并不包括关于 x 的运动, 由此立即可知 x 是不变量, $\hat{X}^{(1)}x = 0$, 满足

$$\hat{X}^{(1)}w(x, y, y_1) = \hat{\eta}w_y + \hat{\eta}^{(1)}w_{y_1} = 0, \quad w_{y_1} \neq 0 \tag{3.276}$$

的第二个不变量 $w(x, y, y_1)$ 是作为求解特征方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\hat{\eta}} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\hat{\eta}^{(1)}}, \quad x = \mathrm{const} \tag{3.277}$$

的积分常数. 因而

$$w^{(1)}(x,y,y_1,y_2)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial w}{\partial x}+y_1\frac{\partial w}{\partial y}+y_2\frac{\partial w}{\partial y_1},\quad (w^{(1)})_{y_2}\neq 0$$

明显是不同的不变量. 从而, 根据不变量 $x, w, w^{(1)}$, 可以断定, 对于某个函数 $\hat{H}(x, w)=Dw$, 曲面 (3.270) 为

$$\frac{\partial w}{\partial y_1}F(x,y,y_1,y_2)=w^{(1)}-\hat{H}(x,w)\equiv\hat{F}(x,w,w^{(1)})=0.$$

因此, 二阶 ODE: $y''=f(x,y,y')$ 可构造性地约化为一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\hat{H}(x,w). \tag{3.278}$$

值得注意的是, 根据 $X^{(1)}$ 的不变量 $u(x,y), v(x,y,y_1)$ 与标准的约化对比, 由给定二阶 ODE (3.270) 的最初的自变量, 约化 (3.278) 可直接得到. 如果给定的点对称在 $F=0$ 上具有形式 $\hat{X}^{(1)}=X^{(1)}$, 那么, 这种情况下, 两种阶的约化方法是一样的, 且如果给定的点对称具有形式 $\xi\equiv 0, \eta\neq 0$, 那么这种情况会出现.

1. 平移对称

考虑二阶非线性谐振子方程

$$y''+\omega^2 y+g(y)=0,\quad \omega=\mathrm{const}, \tag{3.279}$$

其中 $g(y)=G'(y)$ 是某个非线性势. (x,y,y_1,y_2) 空间上相应的曲面

$$F(x,y,y_1,y_2)=y_2+\omega^2 y+g(y)=0 \tag{3.280}$$

拥有平移对称 $\xi=1, \eta=0$ (即 $\hat{\eta}=-y_1$), 且拓展的无穷小生成元具有特征形式

$$\hat{X}^{(1)}=-y_1\frac{\partial}{\partial y}+(\omega^2 y+g(y))\frac{\partial}{\partial y_1}, \tag{3.281}$$

满足 $\hat{X}^{(1)}w(x,y,y_1)=0(w_{y_1}\neq 0)$ 的不变量可通过解特征方程 (3.277) 求得, 这里其方程变为可分离的一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y}=-\frac{\omega^2 y+g(y)}{y_1}. \tag{3.282}$$

由 (3.282) 的积分常数可得不变量

$$w=\frac{1}{2}(y_1)^2+\frac{1}{2}\omega^2 y^2+G(y). \tag{3.283}$$

因而

$$Dw = y_1 w_y - [\omega^2 y + g(y)]w_{y_1} = \omega^2 y y_1 + g(y)y_1 - [\omega^2 y + g(y)]y_1 = 0,$$

从而, 谐振子方程 (3.279) 约化为平凡的一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.284}$$

因为 ODE (3.284) 的解为 $w = \text{const} = c$, 所以由约化 (3.284) 可得 ODE(3.279) 的求积分

$$\frac{1}{2}(y_1)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 + G(y) = c, \tag{3.285}$$

其是谐振子的能量.

满足 $X^{(1)}u = u_x = 0, X^{(1)}v = v_x = 0$ 的标准不变量为 $u = y, v = y_1$. 因此, ODE (3.279) 约化为一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{y_2}{y_1} = -\frac{\omega^2 y + g(y)}{y_1} = -\frac{\omega^2 u + g(u)}{v}. \tag{3.286}$$

可知, ODE(3.286) 和 (3.282) 具有同样形式, 且约化的 ODE 和一阶不变量方程在这两个程序中相互转化.

2. 尺度对称

考虑二阶 Euler 方程

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0, \tag{3.287}$$

且 (x, y, y_1, y_2) 空间上相应的曲面为

$$F(x, y, y_1, y_2) = y_2 + 4x^{-1}y_1 + 2x^{-2}y = 0. \tag{3.288}$$

该曲面拥有尺度对称 $\xi = x, \eta = 0$(即 $\hat{\eta} = -xy_1$), 且拓展的无穷小生成元具有特征形式

$$\hat{X}^{(1)} = -xy_1\frac{\partial}{\partial y} + (3y_1 + 2x^{-1}y)\frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{3.289}$$

求解不变量 $\hat{X}^{(1)}w(x, y, y_1) = 0$ 的特征方程 (3.277) 约化为求解齐次 ODE

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y} = -3x^{-1} - 2x^{-2}\frac{y}{y_1}, \quad x = \text{const}. \tag{3.290}$$

由 ODE(3.290) 的解所得到的积分常数可知

$$w = (y_1 y^{-1} + 2x^{-1})^2 (y_1 y^{-1} + x^{-1})^{-1} y = (y_1 + 2yx^{-1})^2 (y_1 + yx^{-1})^{-1}. \tag{3.291}$$

因而可得

$$Dw = w_x + y_1 w_y - [4x^{-1}y_1 + 2x^{-2}y]w_{y_1} = -x^{-1}(y_1 + 2yx^{-1})^2(y_1 + yx^{-1})^{-1} = -x^{-1}w. \tag{3.292}$$

从而, Euler 方程 (3.287) 约化为一阶线性 ODE

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = -x^{-1}w. \tag{3.293}$$

因此, $xw = \text{const} = c$ 和由 (3.291) 得到曲面

$$(xy_1 + 2y)^2(xy_1 + y)^{-1} = c \tag{3.294}$$

所确定的 (3.287) 的求积分. 最后, 注意这个曲面也拥有 ODE(3.287) 所拥有的尺度对称 $x \to \alpha x, y \to y$. 因此, 能够解 ODE (3.294) 得到 Euler 方程 (3.287) 的全积分.

$X^{(1)} = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y_1\dfrac{\partial}{\partial y_1}$有不变量 $u = y, v = xy_1$, 满足 $X^{(1)}u = xu_x = 0, X^{(1)}v = xv_x - y_1 v_{y_1} = 0$. 那么, 根据这些不变量, Euler 方程 (3.287) 有标准的约化

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{y_1 + xy_2}{y_1} = -3 - 2\frac{u}{v}. \tag{3.295}$$

注意, ODE (3.295) 与 ODE (3.290) 是一样的.

考虑 n 阶 ODE$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 表示成的曲面

$$F(x, y, y_1, \cdots, y_n) = y_n - f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = 0. \tag{3.296}$$

如果 ODE (3.296) 拥有点对称 $X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, 且它的拓展的无穷小生成元具有特征形式

$$\hat{X}^{(n-1)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \hat{\eta}^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \quad \text{在 } F = 0 \text{ 上}, \tag{3.297a}$$

$$\hat{\eta} = \eta(x,y) - y_1\xi(x,y), \quad \hat{\eta}^{(j)} = D^j\hat{\eta}, \quad j = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{3.297b}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-2}} + f\frac{\partial}{\partial y_{n-1}},$$

那么能够求得 n 个满足 $\hat{X}^{(n)}w_i = 0$ 的函数无关的不变量 $x, w_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$, 且可看作求解特征方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\hat{\eta}} = \frac{\mathrm{d}y_1}{\hat{\eta}^{(1)}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}y_{n-1}}{\hat{\eta}^{(n-1)}}, \quad x = \text{const} \tag{3.298}$$

的积分常数. 可以证明, 微分不变量 $w_i^{(1)} = \mathrm{d}w_i/\mathrm{d}x, i = 1, 2, \cdots, n-1$ 直接将给定的 n 阶 ODE (3.296) 约化为一阶常微分方程组, 且 x 为自变量.

3.5.4 用接触和高阶对称实现阶的约化

3.5.3 节中所提到的用 n 阶 ODE 拥有的特征形式的点对称 (即一阶对称), 所采取的直接阶的约化方法可自然地推广到用所拥有的接触对称和高阶对称. 利用 3.5.2 节中两个例子 (3.245) 和 (3.257) 来说明这种推广.

1. 接触对称

(x, y, y_1, y_2, y_3) 空间上的曲面

$$F = y_3 - 6x(y_1)^{-2}(y_2)^3 - 6(y_1)^{-1}(y_2)^2 = 0 \tag{3.299}$$

所表示的三阶 ODE (3.245) 拥有 7 个接触对称 (3.249) 和 (3.252). 这里, 通过用对应于无穷小生成元

$$\hat{X}^{(2)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \hat{\eta}^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad 在\ F = 0\ 上 \tag{3.300}$$

的接触对称 $\hat{\eta} = (y_1)^{-1}$ 执行这个直接阶的约化方法, 其中

$$\hat{\eta} = (y_1)^{-1}, \quad \hat{\eta}^{(1)} = -(y_1)^{-2}y_2, \quad \hat{\eta}^{(2)} = -[6x(y_1)^{-4}(y_2)^3 + 4(y_1)^{-3}(y_2)^2]. \tag{3.301}$$

首先, 确定满足

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(2)}w(x, y, y_1, y_2) =& (y_1)^{-1}w_y - (y_1)^{-2}y_2 w_{y_1}\\ &- [6x(y_1)^{-4}(y_2)^3 + 4(y_1)^{-3}(y_2)^2]w_{y_2} = 0\end{aligned} \tag{3.302}$$

的不变量. 显然, 一个不变量是 $w = x$, 另外两个不变量源于求解特征方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{(y_1)^{-1}} = -\frac{\mathrm{d}y_1}{(y_1)^{-2}y_2} = -\frac{\mathrm{d}y_2}{6x(y_1)^{-4}(y_2)^3 + 4(y_1)^{-3}(y_2)^2}, \quad x = \text{const} \tag{3.303}$$

的积分常数. 值得注意的是, 在解 (3.303) 时有一些选择自变量的自由度. 如果选择 y_1 为自变量, 那么 (3.303) 变为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_1} = 6x(y_1)^{-2}(y_2)^2 + 4(y_1)^{-1}y_2, \tag{3.304a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y_1} = -y_1(y_2)^{-1}. \tag{3.304b}$$

显然, ODE (3.304a) 拥有尺度对称 $y_1 \to \alpha y_1, y_2 \to \alpha y_2$, 从而可以容易地解得不变量

$$w_1 = 2x(y_1)^3 + (y_1)^4(y_2)^{-1}. \tag{3.305}$$

因此, 求解 (3.305) 可得 $(y_2)^{-1}$, 将其代入 (3.304b), 使其变为 y 的线性齐次 ODE. 所以, 由 ODE (3.304b) 的解得到第二个不变量

$$w_2 = y - \frac{1}{2}w_1(y_1)^{-2} - 2xy_1. \tag{3.306}$$

那么可得

$$Dw_1 = (w_1)_x + (w_1)_{y_1}y_2 + 6(w_1)_{y_2}(y_1)^{-2}(y_2)^3(x + y_1(y_2)^{-1}) = 0, \tag{3.307}$$

由 (3.307) 和 (3.305) 可得

$$Dw_2 = (w_2)_x + (w_2)_y y_1 + (w_2)_{y_1}y_2 - \frac{1}{2}(y_1)^{-2}Dw_1 = 0, \tag{3.308}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + 6(y_1)^{-2}(y_2)^3(x + y_1(y_2)^{-1})\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

因此, (3.307) 和 (3.308) 确定的微分不变量 $\mathrm{d}w_1/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}w_2/\mathrm{d}x$ 将 ODE(3.299) 约化为平凡的一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = 0, \tag{3.309a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.309b}$$

那么, 由 (3.309a,b) 的解 $w_1 = \mathrm{const} = c_1$, $w_2 = \mathrm{const} = c_2$ 得到 ODE (3.299) 的两个求积分

$$2x(y_1)^3 + (y_1)^4(y_2)^{-1} = c_1, \tag{3.310}$$

$$y - \frac{1}{2}c_1(y_1)^{-2} - 2xy_1 = c_2. \tag{3.311}$$

因此, 可将三阶 ODE (3.299) 约化为曲面

$$2x(y_1)^3 + (c_2 - y)(y_1)^2 + \frac{1}{2}c_1 = 0 \tag{3.312}$$

所确定的一阶 ODE. 注意, 这个曲面拥有对称 $x \to \alpha x, y \to \alpha^{2/3}(y - c_2) + c_2$, 继承了 (3.299) 的尺度对称和平移对称. 从而能够通过解 ODE (3.312) 求得给定 ODE(3.299) 的完全积分.

2. 二阶对称

$(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 空间上的曲面

$$F = y_4 - \frac{4}{3}(y_2)^{-1}(y_3)^2 = 0 \tag{3.313}$$

所代表的四阶 ODE (3.257) 拥有 12 个二阶对称 (3.263). 通过所拥有的二阶对称 $\hat{\eta}=y_1(y_2)^{-1/3}$, 我们现在应用直接的阶的约化方法. 相应拓展的无穷小生成元为

$$\hat{X}^{(3)}=\hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}+\hat{\eta}^{(2)}\frac{\partial}{\partial y_2}+\hat{\eta}^{(3)}\frac{\partial}{\partial y_3},\quad 在\ F=0\ 上, \tag{3.314a}$$

其中

$$\hat{\eta}^{(1)}=(y_2)^{2/3}-\frac{1}{3}y_1(y_2)^{-4/3}y_3,\quad \hat{\eta}^{(2)}=\frac{1}{3}(y_2)^{-1/3}y_3,\quad \hat{\eta}^{(3)}=\frac{1}{3}(y_2)^{-4/3}(y_3)^2. \tag{3.314b}$$

首先, 确定不变量, 且满足

$$\begin{aligned}&\hat{X}^{(3)}w(x,y,y_1,y_2,y_3)\\ &=y_1(y_2)^{-1/3}w_y+(y_2)^{-4/3}\left[(y_2)^2-\frac{1}{3}y_1y_3\right]w_{y_1}\\ &\quad+\frac{1}{3}(y_2)^{-1/3}y_3w_{y_2}+\frac{1}{3}(y_2)^{-4/3}(y_3)^2w_{y_3}\\ &=0.\end{aligned} \tag{3.315}$$

一个明显的不变量是 $w=x$, 另外三个不变量 w_1,w_2,w_3 源于解特征方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{y_1(y_2)^{-1/3}}=\frac{\mathrm{d}y_1}{(y_2)^{-4/3}\left[(y_2)^2-\frac{1}{3}y_1y_3\right]}=\frac{3\mathrm{d}y_2}{(y_2)^{-1/3}y_3}=\frac{3\mathrm{d}y_3}{(y_2)^{-4/3}(y_3)^2},\quad x=\text{const} \tag{3.316}$$

的积分常数. 如果选择 y_3 为自变量, 那么 (3.316) 变为常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}y_3}=(y_3)^{-1}y_2, \tag{3.317a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}y_3}=3(y_3)^{-2}(y_2)^2-(y_3)^{-1}y_1, \tag{3.317b}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y_3}=3(y_3)^{-2}y_1y_2. \tag{3.317c}$$

我们知道 (3.317a) 为 y_2 的线性齐次 ODE. 如果将 (3.317a) 的解代入 (3.317b), 可得关于 y_1 的线性齐次 ODE. 依次将 (3.317a,b) 的解代入 (3.317c) 可知, (3.317c) 变为关于 y 的可分离的 ODE. 因而, 由常微分方程组 (3.317a~c) 的积分常数可得三个不变量

$$w_1=(y_3)^{-1}y_2, \tag{3.318a}$$

$$w_2=y_1y_3-\frac{3}{2}(y_2)^2, \tag{3.318b}$$

$$w_3=y-9(y_3)^{-2}(y_2)^3+3(y_3)^{-1}y_1y_2. \tag{3.318c}$$

于是, 有

$$Dw_1 = -\frac{1}{3}, \tag{3.319a}$$

$$Dw_2 = -2y_2y_3 + \frac{4}{3}(y_2)^{-1}y_1(y_3)^2 = \frac{4}{3}(w_1)^{-1}w_2, \tag{3.319b}$$

$$Dw_3 = 0, \tag{3.319c}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{4}{3}(y_3)^2(y_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

因而, (3.319a~c) 确定的微分不变量 $\mathrm{d}w_1/\mathrm{d}x, \mathrm{d}w_2/\mathrm{d}x, \mathrm{d}w_3/\mathrm{d}x$ 将 ODE (3.313) 约化为一阶常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}, \tag{3.320a}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}x} = \frac{4}{3}(w_1)^{-1}w_2, \tag{3.320b}$$

$$\frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{3.320c}$$

从而, 通过求解 (3.320a~c) 得

$$w_1 = -\frac{1}{3}x + c_1, \quad w_2 = c_2\left(-\frac{1}{3}x + c_1\right)^{-4}, \quad w_3 = c_3, \tag{3.321}$$

可得三个求积分

$$(y_3)^{-1}y_2 + \frac{1}{3}x = \text{const} = c_1, \tag{3.322a}$$

$$\left[y_1y_3 - \frac{3}{2}(y_2)^2\right]\left(-\frac{1}{3}x + c_1\right)^4 = \text{const} = c_2, \tag{3.322b}$$

$$y - 9(y_3)^{-2}(y_2)^3 + 3(y_3)^{-1}y_1y_2 = \text{const} = c_3. \tag{3.322c}$$

将 y_2 和 y_3 由 (3.322a,b) 代入 (3.322c), 则给定 ODE (3.313) 约化为可分离的一阶 ODE

$$y_1 = \pm\frac{1}{c_1 - \dfrac{1}{3}x}\sqrt{\frac{1}{9}(c_3 - y)^2 + 6c_2}, \tag{3.323}$$

从而, 由 (3.323) 的解得到 ODE (3.313) 的完全积分, 即通解

$$\left(c_1 - \frac{1}{3}x\right)^{\pm 1}\left(y - c_3 + \sqrt{(c_3 - y)^2 + 54c_2}\right) = \text{const} = c_4,$$

或等价于

$$y = \widetilde{c}_3 + \widetilde{c}_4(\widetilde{c}_1 - x) + \widetilde{c}_2(\widetilde{c}_1 - x)^{-1}, \tag{3.324}$$

其中 $\widetilde{c}_i$ 为某些重新命名的常数.

习　题　3.5

1. 考虑阶 ODE(3.231) 拥有的单参数 Lie 点变换群

$$x^* = x + \varepsilon\xi(x,y) + O(\varepsilon^2),$$
$$y^* = y + \varepsilon\eta(x,y) + O(\varepsilon^2),$$

且无穷小生成元为 $X = \xi\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta\dfrac{\partial}{\partial y}$. 证明：切于代表 ODE(3.231) 的曲面 (3.234) 的相应的向量场 $\hat{X}^{(n)}$ 为

$$\hat{X}^{(n)} = \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\eta}^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + \hat{\eta}^{(n)}\frac{\partial}{\partial y_n}, \quad \text{在 } F = 0 \text{ 上},$$

其中

$$\hat{\eta} = \eta - y_1\xi, \quad \hat{\eta}^{(k)} = D^k\eta - \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{(k-j)!j!}y_{k+1-j}D^j\xi, \quad k = 1,2,\cdots,n-1,$$

且

$$y_n = f(x,y,y_1,\cdots,y_n), \quad \hat{\eta}^{(n)} = f_y\hat{\eta} + f_{y_1}\hat{\eta}^{(1)} + \cdots + f_{y_{n-1}}\hat{\eta}^{(n-1)}.$$

2. 求非线性扩散方程 $y'' + ay' + by + y^3 = 0, a, b = \text{const}$ 拥有的点对称.

3. 求解 ODE: $y'' = 2(y')^2\cot y + \sin y\cos y$ 拥有的点对称 (Stephani, 1989). 证明：这些对称构成 SO(3)Lie 代数.

4. 求如下 ODEs 拥有的接触对称：

(a) $y''' = 0$(检验 (3.243));

(b) $y''' = x(x-1)(y'')^3 - 2x(y'')^2 + y''$;

(c) $y''' = y\left(\dfrac{y''}{y'}\right)^3$.

5. 求三阶 ODE: $y''' + yy' = 0$ 拥有的接触对称. 该 ODE 源于 Korteweg-de Vries(KdV) 方程的行波解的描述 (参看习题 4.1.2).

6. 求四阶 ODE: $y^{(4)} = (y)^{-1}y'y'''$ 的二阶的对称.

7. 求四阶 ODE (Sheftel, 1997): $y^{(4)} = y^{-5/3}$ 的直到二阶的对称. 证明：所拥有的点对称构成三维 Lie 代数且换位子为 $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2\hat{X}_1, [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = 2\hat{X}_3, [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = -\hat{X}_2$.

8. 基于 (3.235) 拥有的平移对称或尺度对称的假设 $\widetilde{X}\hat{\eta} = r\hat{\eta}$, 证明：Blasius 方程 (3.235) 并不拥有二阶对称.

9. 求拥有接触对称 $\hat{\eta} = (y_1)^{-1}$ 的所有三阶 ODEs.

10. 求拥有二阶对称 $\hat{\eta} = y_2$ 的所有四阶 ODEs.

11. 用阶的直接约化法来约化:

(a) 根据尺度对称 (3.105a,b) 作用下 (3.104) 的不变性约化二阶线性 ODE(3.104).

(b) 根据平移变换作用下 (3.253) 的不变性约化 Blasius 方程 (3.253).

(c) 根据如下变换:

(i) x 的尺度变换;

(ii) y 的尺度变换;

(iii) (3.249) 的接触对称 $\hat{\eta}_2$;

(iv) (3.249) 的接触对称 $\hat{\eta}_3$

作用下 (3.245) 的不变性约化三阶 ODE(3.245).

(d) 根据如下变换:

(i) x 的平移变换;

(ii) y 的平移变换;

(iii) (3.263) 的每个二阶对称 $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_4, \hat{\eta}_5, \cdots, \hat{\eta}_{12}$

作用下 (3.257) 的不变性约化四阶 ODE(3.257).

12. 考虑 Thomas-Fermi 方程

$$y'' = x^{-1/2} y^{3/2}. \tag{3.325}$$

(a) 证明: ODE(3.325) 拥有尺度对称 $\hat{X} = (3y + xy_1)\dfrac{\partial}{\partial y}$. 用阶的直接约化法, 根据 $\hat{X}$ 作用下的不变性约化 (3.325).

(b) 证明: 关于不变量 $w(x, y, y_1)$ 的方程 $\hat{X}^{(1)} w(x, y, y_1) = 0$ 等价于通过标准的约化法得到的一阶 ODE.

(c) 证明: 虽然不能显式地求得不变量 $w(x, y, y_1)$, 但是相应约化的 ODE: $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = \hat{H}(x, w)$ 可隐式地表示为

$$\theta_w \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \theta_x = \frac{3x^{1/2} y^{5/2} - 4\theta^2}{3y + x\theta}, \tag{3.326}$$

其中 $y_1 = \theta(y, w; x)$ 是 $\hat{X}^{(1)} w(x, y, y_1) = 0$ 的解. 特别地, 证明: 事实上, (3.326) 并不依赖 y , 结果 (3.326) 是关于 x 和 w 的一阶 ODE.

3.6 通过积分因子获得首次积分和阶的约化

3.2.2 节研究了一阶 ODEs 的首次积分和积分因子, 我们将这种古典处理推广到二阶和高阶 ODEs 的情况.

定义 3.6.1 n 阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3.327}$$

的首次积分是本质依赖 $y^{(n-1)}$ 的函数 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$, 且满足

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} = 0, \quad 当\ y^{(n)} = f\ 时, \tag{3.328}$$

即对 ODE(3.327) 的解 $y = \Theta(x)$ 来说是 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 个常数.

因为对于 ODE(3.327) 的每个解 $y = \Theta(x)$, ODE (3.327) 的首次积分 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 满足 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = \mathrm{const} = c$, 所以它代表任意解 $y = \Theta(x)$ 的守恒量. 而且, 根据最初的变量 $x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}$, 首次积分提供了积分的方法, 它将 (3.327) 约化为 $n-1$ 阶 ODE. 如果已知 (3.327) 的 r 个首次积分是函数无关的, 即它们中的任一个都不是其他的函数组合, 那么, 根据 r 个本质常数和 $n-r+1$ 个变量 $x, y, y', \cdots, y^{(n-r-1)}$, n 阶 ODE (3.327) 可约化为 $n-r$ 阶 ODE. 特别地, 由任意 n 个函数无关的首次积分可求得 ODE (3.327) 的包含 n 个本质常数的通解. 对于 ODE 的解 $y = \Theta(x)$ 来说, 这些常数代表 n 个无关的守恒量.

正如在 3.2.2 节中对于一阶 ODE 所阐述的, 众所周知, 发现首次积分等价于寻找积分因子. 对于二阶和高阶 ODE 也是一样的.

定义 3.6.2 n 阶 ODE (3.327) 的积分因子是函数 $\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)}) \neq 0, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1$, 且满足

$$\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)})(y^{(n)} - f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{3.329}$$

其中 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 是某个函数, 且本质依赖 $y^{(n-1)}$. $\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)})$ 中 y 的导数的最高阶 ℓ 称为积分因子的阶.

由 (3.329) 可知, 当 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 时, $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}x = 0$. 因而对于 ODE (3.327) 的解 $y = \Theta(x)$, 有 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = \mathrm{const} = c$. 这种情况下, $\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)})$ 是非奇异的. 特别地, 如果对任意函数 $y(x)$, $\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)})$ 是非奇异的, 那么对 (3.327) 的每个解, $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = \mathrm{const} = c$ 都成立, 因而可确定 ODE (3.327) 的首次积分. 从而, 如果 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 是 ODE(3.327) 的首次积分, 那么容易证明 (3.329) 成立, 且 $\Lambda = \partial\psi/\partial y^{(n-1)}$ 定义了 (3.327) 的相应的积分因子. 因此, ODE (3.327) 的所有首次积分都源于满足线性关系 (3.329) 的积分因子, 且 $y(x)$ 是任意函数. 方程 (3.329) 称为积分因子和首次积分的特征方程. 值得注意的是, 作为特征方程 (3.329) 的线性结果, 给定 ODE(3.327) 的所有积分因子集和首次积分集分别构成向量空间.

我们首先推导充要的线性确定方程组, 由其解可得任意给定 n 阶 ODE(3.327) 的积分因子. 另外还导出线积分公式, 通过特征方程 (3.329), 可得对应于积分因子的首次积分. 值得注意的是, ODE 解的局部存在性理论 (Coddington, 1961) 保证任意 n 阶 ODE (3.327) 拥有 n 个函数无关的首次积分 $\psi_1(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\cdots,\psi_n(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$. 因为 $\psi_1(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\cdots,\psi_n(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 的任意函数也是首次积分, 那么可知, 给定 ODE (3.327) 拥有本质依赖 $y^{(n-1)}$ 的无穷多个积分因子. 因此, $n-1$ 阶 ODE (3.327) 的积分因子的确定系统总具有无穷多个解. 然而, 对于积分因子的阶为 $l<n-1$ 的情况, 确定系统可约化为超定的线性偏微分方程组, 且最多只有有限个线性无关的解. 这种情况类似于 ODE (3.327) 的对称的确定系统 (参看 3.5 节).

定义 3.6.3　n 阶 ODE (3.327) 的阶为 $\ell\leqslant n-1$ 的积分因子 $\Lambda(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})$ 具有点形式, 如果 $\ell=1$ 且 Λ 关于 y' 是线性的, 即

$$\Lambda(x,y,y')=\alpha(x,y)+\beta(x,y)y'.$$

否则, 对于 $\ell=1$, 积分因子称为一阶; 对于 $\ell\geqslant 2$, 称为高阶.

我们将要表明, 如何通过求解确定系统获得 n 阶 ODE(3.327) 的所有 $0\leqslant\ell<n-1$ 阶的积分因子. 还提出有效的假设, 用以求得积分因子确定系统的特解. 而且, 这些假设本质上是用来得到 $\ell=n-1$ 阶的积分因子. 这些假设将积分因子确定系统分成超定的线性偏微分方程组. 最重要的是, 在所有情况下, 可以用简单的算法程序求解这些方程, 这类似于求解 ODE (3.327) 的 $\ell\leqslant n-1$ 阶对称的确定方程情形. 我们将通过很多例子来说明.

3.6.1　一阶 ODEs

考虑一阶 ODE (3.327), 或等价于曲面

$$y_1=f(x,y). \tag{3.330}$$

ODE (3.330) 的首次积分是曲面 (3.330) 上的任意函数 $\psi(x,y)=\text{const}=c$, 使得 $\psi_y\neq 0$, 因此满足

$$(D\psi)\,|_{y_1=f}=D\psi=\psi_x+f\psi_y=0\,, \tag{3.331}$$

其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.332a}$$

且

$$D=D\,|_{y_1=f}\;=\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y} \tag{3.332b}$$

(即 y_1 可以用 ODE (3.330) 消去). 从而, 对于任意函数 $y(x)$, 有

$$D\psi = (y_1 - f)\Lambda, \tag{3.333}$$

其中, 由 (3.330) 得

$$\Lambda(x,y) = \psi_y = -\frac{1}{f}\psi_x, \tag{3.334}$$

且为对应于首次积分 $\psi(x,y)$ 的积分因子. 相反, 对于某个函数 $\psi(x,y)$ 和任意函数 x, y, y_1, 满足 (3.333) 的任意的 $\Lambda(x,y) \neq 0$ 是 ODE (3.330) 的积分因子, 且 $\psi(x,y)$ 是首次积分. 分别消去 (3.334) 中的 $\Lambda(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$, 可以得到 ODE (3.330) 的积分因子和首次积分的充要条件.

定理 3.6.1.1 ODE (3.330) 的积分因子是确定方程

$$\Lambda_x + (f\Lambda)_y = 0 \tag{3.335}$$

的解 $\Lambda(x,y) \neq 0$. 对于给定的积分因子, ODE (3.330) 的相应的首次积分 $\psi(x,y)$ 为线积分

$$\psi = \int_C [-\Lambda f \mathrm{d}x + \Lambda \mathrm{d}y], \tag{3.336}$$

其中 C 是 (x,y) 空间上从任意点 $(\tilde{x},\tilde{y})$ 到点 (x,y) 的轨线. $(\tilde{x},\tilde{y})$ 的改变使得 (3.336) 增加一个常数. 如果 $f(x,y)$ 和 $\Lambda(x,y)$ 是非奇异的, 那么线积分 (3.336) 与轨线 C 无关.

证明 假设 $\Lambda(x,y)$ 是 ODE (3.330) 的积分因子. 那么由 (3.334) 可得一对方程

$$-\Lambda f = \psi_x, \quad \Lambda = \psi_y. \tag{3.337}$$

通过微分和偏导数的可交换性可知, $\Lambda(x,y)$ 满足 (3.335), 且恰是求解 (3.337) 的可积条件.

相反地, 假设 $\Lambda(x,y)$ 是积分因子确定方程 (3.335) 的解. 因为求解 (3.337) 的可积条件成立, 由此可知存在满足 (3.334) 的函数 $\psi(x,y)$. 由关于梯度的线积分的微积分基本定理得到 (3.336). 而且, 由积分因子确定方程 (3.335) 可知, 当 $f(x,y)$ 和 $\Lambda(x,y)$ 是非奇异时, (3.336) 与轨线 C 无关. □

关于定理 3.6.1.1, 存在另一公式, 在将它推广到高阶 ODEs 时更有用. 首先, 利用 (3.332a), 则积分因子确定方程 (3.335) 变为

$$0 = \Lambda_x + f\Lambda_y + f_y\Lambda = D\Lambda + (f - y_1)\Lambda_y + f_y\Lambda = -E_1(\theta), \tag{3.338a}$$

且

$$\theta(x,y,y_1) = (y_1 - f(x,y))\Lambda(x,y), \tag{3.338b}$$

其中

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial y} - D\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{3.339}$$

表示截断的 Euler 算子. 容易证明算子 (3.339) 取消 x 和 y 的任意可微函数的全导数. 特别地, 对于任意函数 $\psi(x,y)$, 如果令 $\theta(x,y,y_1) = D\psi(x,y)$, 且定义 $\Psi_1 = \theta_{y_1}$, $\Psi_0 = \theta_y - D\Psi_1$, 那么利用恒等式 $\Psi_1 = \psi_y, \Psi_0 = (D\psi)_y - D\psi_y$, 有

$$(\Psi_1)_{y_1} = 0, \tag{3.340}$$

$$\Psi_0 = 0. \tag{3.341}$$

相反地, 如果存在某个函数 $\theta(x,y,y_1)$, 使得 (3.340) 和 (3.341) 成立, 其中 $\Psi_1 = \theta_{y_1}, \Psi_0 = \theta_y - D\Psi_1$, 那么由 (3.340) 可得 $\theta_{y_1y_1} = 0$, 由此可得

$$\theta = Ay_1 + B, \tag{3.342}$$

其中 $A(x,y), B(x,y)$ 是某些函数. 从而由 (3.341) 可得

$$A_x - B_y = 0,$$

其恰为可积条件, 该条件保证存在函数 $\psi(x,y)$ 使得 $A = \psi_y, B = \psi_x$. 因此, 由 (3.342) 可得 $\theta = \psi_x + \psi_y y_1 = D\psi$. 而且, $\theta_{y_1} = \psi_y$ 和 $\theta - y_1\theta_{y_1} = \psi_x$ 仅仅是 x 和 y 的函数, 有

$$\psi(x,y) = \int_C [\theta(x,y,0)\mathrm{d}x + \theta_{y_1}(x,y,0)\mathrm{d}y], \tag{3.343}$$

根据 $\theta(x,y,y_1)$, 在相差任意常数意义下, 这给出了 $\psi(x,y)$ 的线积分公式, 其中 C 是 (x,y) 空间上从点 $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ 到点 (x,y) 的任意轨线. 则 (3.338b) 代入 (3.343) 可得线积分 (3.336).

积分因子的确定方程 (3.335) 是具有无穷多解的一阶线性齐次 PDE. 特别地, 如果 $\Lambda(x,y)$ 是 ODE(3.330) 的对应于首次积分 $\psi(x,y)$ 的积分因子, 那么因为任意函数 $F(\psi)$ 一定是 ODE(3.330) 的首次积分, 由此可知, 由 (3.334) 所获得 $F'(\psi)\Lambda$ 也是一个积分因子. 而且, 这表示积分因子确定方程 (3.335) 的通解. 由 (3.336) 可知, 由 (3.335) 的任意特解 $\Lambda = \Lambda_1(x,y)$ 得到相应的首次积分 $\psi = \psi_1(x,y)$, 进而将 ODE(3.330) 约化为求积分 $\psi_1(x,y) = \mathrm{const} = c_1$. 但是, 一般地, 如果不知道 ODE(3.330) 的通解, 那么也不能获得积分因子确定方程 (3.335) 的任一解.

从而, 对于给定的 ODE(3.330), 通常确定是否它拥有具有特殊形式的积分因子. 基于变量的消去, 存在两种简单的假设.

如果寻找 $\Lambda = \alpha(x)$, 那么由积分因子确定方程 (3.335) 可得 $\alpha' + \alpha f_y = 0$, 进而知 $f(x,y)$ 必须满足 $f_y = -\alpha'/\alpha$, 使得 $f(x,y) = -(\alpha'/\alpha)y + \beta$, 其中 $\beta = \beta(x)$ 是某

个函数. 因此, ODE(3.330) 拥有仅仅与 x 有关的积分因子, 当且仅当 $f(x,y)$ 是 y 的线性函数. 则 $\Lambda = \mathrm{e}^{-\int A(x)\mathrm{d}x}$ 是积分因子, 其中 $y_1 = f(x,y) = A(x)y + B(x)$.

另外, 如果寻找 $\Lambda = \alpha(y)$, 那么由积分因子确定方程 (3.335) 可得 $\alpha' f + \alpha f_y = 0$, 进而知 $f(x,y)$ 必须满足 $f_y/f = -\alpha'/\alpha$. 于是得 $f = \beta/\alpha$, 其中 $\beta = \beta(x)$ 是某个函数. 因此, ODE(3.330) 拥有仅仅与 y 有关的积分因子, 当且仅当 $f(x,y)$ 是关于 x 和 y 的可分离的函数. 则 $\Lambda = 1/B(y)$ 是积分因子, 其中 $y_1 = f(x,y) = A(x)B(y)$.

基于分离变量, 存在更有效且一般的假设. 考虑 $\Lambda = \alpha(x)\beta(y)$. 则从积分因子确定方程 (3.335), 发现 $(\alpha'/\alpha) + (\beta'/\beta)f + f_y = 0$. 进而关于 y 求积分得 $f\beta = -(\alpha'/\alpha)\displaystyle\int \beta \mathrm{d}y + \gamma$, 其中 $\gamma = \gamma(x)$ 是某个函数. 所以, ODE (3.330) 拥有可分离形式的积分因子, 当且仅当对于某些函数 $A(x), B(x), C(y)$, 有

$$y_1 = f(x,y) = \frac{A(x)C(y) + B(x)}{C'(y)}, \tag{3.344}$$

积分因子为

$$\Lambda(x,y) = \mathrm{e}^{-\int A(x)\mathrm{d}x} C'(y), \tag{3.345}$$

相应的首次积分为

$$\psi(x,y) = \mathrm{e}^{-\int A(x)\mathrm{d}x} C(y) - \int \mathrm{e}^{-\int A(x)\mathrm{d}x} B(x)\mathrm{d}x. \tag{3.346}$$

这类 ODEs (3.344) 包括所有线性 ODEs, 即对应于 $C(y) = y$; 所有可分离的 ODEs, 即对应于 $A(x) \equiv 0$ 或 $B(x) \equiv 0$; 所有 Bernoulli ODEs, 即对应于 $C(y) = y^r$, $r = \mathrm{const}$.

更一般地, 对于给定积分因子假设 $\Lambda = \alpha(x,y)$, 能够通过解积分因子确定方程 (3.335) 求得

$$y_1 = f(x,y) = -\frac{1}{\alpha(x,y)} \int \alpha_x(x,y)\mathrm{d}y + \frac{\beta(x)}{\alpha(x,y)}, \tag{3.347}$$

其产生拥有给定积分因子的最一般的 ODE. 相反地, 对于某些 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x)$, 如果能够匹配 (3.347) 使得它与给定的 ODE (3.330) 一致, 那么立即可求得积分因子.

3.6.2 二阶 ODEs 的积分因子的确定方程

现在考虑二阶 ODE

$$y'' = f(x,y,y'), \tag{3.348}$$

或等价于曲面

$$y_2 = f(x,y,y_1). \tag{3.349}$$

定理 3.6.2.1 含有本质依赖 y' 的函数 $\psi(x,y,y')$ 是 ODE(3.348) 的首次积分, 且在曲面 (3.349) 上满足 $\psi(x,y,y')=\text{const}=c$, 当且仅当

$$(D\psi)\,|_{y_2=f} = D\psi = \psi_x + y_1\,\psi_y + f\psi_{y_1} = 0, \tag{3.350}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} \tag{3.351a}$$

和

$$D = D\,|_{y_2=f} = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + f\frac{\partial}{\partial y_1} = D - (y_2 - f)\frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{3.351b}$$

由 (3.351a,b) 可知, (3.350) 等价于特征方程

$$D\psi = \Lambda(y_2 - f) \tag{3.352a}$$

对于任意变量 x, y, y_1, y_2 成立, 且

$$\Lambda(x,y,y_1) = \psi_{y_1} \tag{3.352b}$$

是相应于首次积分的积分因子. 相反地, 对于函数 $\psi(x,y,y_1)$, 如果函数 $\Lambda(x,y,y_1)\neq 0$ 满足 (3.352a,b), 那么 $\Lambda(x,y,y')$ 是 ODE (3.348) 的积分因子, 且 $\psi(x,y,y')$ 是相应的首次积分. 我们现在推导可得到 ODE (3.348) 的所有积分因子 $\Lambda(x,y,y')$ 的确定系统.

考虑截断的 Euler 算子

$$E_2 = \frac{\partial}{\partial y} - D\frac{\partial}{\partial y_1} + D^2\frac{\partial}{\partial y_2}. \tag{3.353}$$

容易证明, 算子 (3.353) 与使得 x, y, y_1 的任意可微函数的全导数消去有关. 令

$$\theta(x,y,y_1,y_2) = D\psi(x,y,y_1), \tag{3.354}$$

且引入符号

$$\Psi_2 = \theta_{y_2}, \quad \Psi_1 = \theta_{y_1} - D\Psi_2, \quad \Psi_0 = \theta_y - D\Psi_1 = E_2(\theta). \tag{3.355}$$

定理 3.6.2.2 函数 $\theta(x,y,y_1,y_2)$ 是全导数 (3.354) 当且仅当在整个 (x,y,y_{1},y_2) 空间上满足

$$(\Psi_2)_{y_2} = (\Psi_1)_{y_2} = 0, \tag{3.356a}$$

$$\Psi_0 = 0. \tag{3.356b}$$

特别地, 如果 $\theta(x,y,y_1,y_2)$ 满足 (3.356a,b), 则对于

$$\psi(x,y,y_1)=\int_C[(\theta(x,y,y_1,0)-y_1\Psi_1(x,y,y_1))\mathrm{d}x+\Psi_1(x,y,y_1)\mathrm{d}y+\Psi_2(x,y,y_1)\mathrm{d}y_1], \tag{3.357}$$

(3.354) 成立, 其中 C 是从点 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1)$ 到 (x,y,y_1) 的轨线.

证明 对于某个函数 $\psi(x,y,y_1)$, 假设函数 $\theta(x,y,y_1,y_2)$ 满足 (3.354). 则利用恒等式

$$(D\psi)_y=D\psi_y,\quad (D\psi)_{y_1}=D\psi_{y_1}+\psi_y,\quad (D\psi)_{y_2}=\psi_{y_1}, \tag{3.358}$$

容易证明, E_2 消除 $D\psi$. 因而, $\theta=D\psi$ 满足 $\Psi_0=0$. 而且, 由 (3.358) 可知 $(\Psi_2)_{y_2}=(\Psi_1)_{y_2}=0$ 是恒等式, 且

$$\Psi_2=\psi_{y_1},\quad \Psi_1=\psi_y. \tag{3.359}$$

因此, (3.356a,b) 成立. 这就完成了定理充分性的证明.

令

$$\Phi=\theta-y_1\Psi_1-y_2\Psi_2. \tag{3.360}$$

则利用 (3.354) 和 (3.359) 可得

$$\Phi=\psi_x. \tag{3.361}$$

因此, 由 (3.359) 和 (3.361) 可知, 存在满足 (3.354) 的函数 $\psi(x,y,y_1)$ 的可积条件为

$$(\Psi_2)_{y_2}=(\Psi_1)_{y_2}=\Phi_{y_2}=0, \tag{3.362a}$$

$$(\Psi_2)_y=(\Psi_1)_{y_1}, \tag{3.362b}$$

$$(\Psi_2)_x=\Phi_{y_1},\quad (\Psi_1)_x=\Phi_y. \tag{3.362c}$$

现在假设函数 $\theta(x,y,y_1,y_2)$ 满足 (3.356a,b). 利用 (3.355), 有

$$(\Psi_2)_y=\theta_{yy_2}=(\Psi_0+D\Psi_1)_{y_2}=(\Psi_1)_{y_1}+(\Psi_0)_{y_2}+D((\Psi_1)_{y_2}).$$

从而, 由 (3.356a,b) 可得 (3.362b). 下面, 利用 (3.355) 和 (3.360), 有

$$\Phi_{y_2}=\theta_{y_2}-\Psi_2-y_1(\Psi_1)_{y_2}-y_2(\Psi_2)_{y_2}=-y_1(\Psi_1)_{y_2}-y_2(\Psi_2)_{y_2},$$

$$\Phi_{y_1}=\theta_{y_1}-\Psi_1-y_1(\Psi_1)_{y_1}-y_2(\Psi_2)_{y_1}=(\Psi_2)_x+y_1((\Psi_2)_y-(\Psi_1)_{y_1}),$$

$$\Phi_y=\theta_y-y_1(\Psi_1)_y-y_2(\Psi_2)_y=(\Psi_1)_x+\Psi_0+y_2((\Psi_1)_{y_1}-(\Psi_2)_y).$$

由 (3.356a,b) 和 (3.362b), 可得 (3.362a,c). 因此, 作为 (3.356a,b) 的结果, 可积条件 (3.362a~c) 成立. 这完成了定理中的必要条件的证明.

最后, 由关系 (3.359)~(3.361), 利用梯度的微积分基本定理, 在相差任意常数情况下, 可得

$$\psi=\int_C[\psi_x\mathrm{d}x+\psi_y\mathrm{d}y+\psi_{y_1}\mathrm{d}y_1]=\int_C[\Phi\mathrm{d}x+\Psi_1\mathrm{d}y+\Psi_2\mathrm{d}y_1], \tag{3.363}$$

其中 C 是从点 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1)$ 到 (x,y,y_1) 的轨线. 因此, 由积分 (3.363) 并结合 (3.360) 和 (3.362a) 可得线积分公式 (3.357). □

现在, 将定理 3.6.2.2 应用于特征方程 (3.352a), 得到关于 ODE (3.349) 的所有积分因子 $\Lambda(x,y,y_1)$ 的充要的确定系统. 令

$$\theta(x,y,y_1,y_2)=(y_2-f(x,y,y_1))\Lambda(x,y,y_1). \tag{3.364}$$

则 (3.356a) 约化为恒等式和关于 y_2 的线性方程 (3.356b). 从而, (3.356b) 分成两个方程

$$A(x,y,y_1)=B(x,y,y_1)=0,$$

其中函数 A 和 B 为

$$\Psi_0=A(x,y,y_1)y_2+B(x,y,y_1)=E_2(\theta).$$

显式地得到

$$2\Lambda_y+\Lambda_{xy_1}+y_1\Lambda_{yy_1}+(f\Lambda)_{y_1y_1}=0, \tag{3.365a}$$

$$-(f\Lambda)_y+(f\Lambda)_{xy_1}+y_1(f\Lambda)_{yy_1}+\Lambda_{xx}+(y_1)^2\Lambda_{yy}+2y_1\Lambda_{xy}=0. \tag{3.365b}$$

对于任意函数 $\Lambda(x,y,y_1)$, 且满足积分确定系统 (3.356a,b), 由 (3.359) 和 (3.364) 可知

$$\Psi_2=\psi_{y_1}=\Lambda,\quad \Psi_1=\psi_y=-\Lambda_x-y_1\Lambda_y-(f\Lambda)_{y_1},\quad \Phi=\psi_x=-y_1\Psi_1-f\Psi_2.$$

因而, 首次积分公式 (3.357) 约化为

$$\begin{aligned}\psi(x,y,y_1)=\int_C[&(y_1\Lambda_x+(y_1)^2\Lambda_y+y_1(f\Lambda)_{y_1}\\&-f\Lambda)\mathrm{d}x-(\Lambda_x+(f\Lambda)_{y_1}+y_1\Lambda_y)\mathrm{d}y+\Lambda\mathrm{d}y_1],\end{aligned} \tag{3.366}$$

其中 C 是点 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1)$ 到 (x,y,y_1) 的轨线. 如果 $f(x,y,y_1)$ 和 $\Lambda(x,y,y_1)$ 是非奇异的, 那么可选择任意的轨线 C, 且 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1)$ 的改变恰好使得 (3.366) 相差一个常数. 最重要的是, 如果 $f(x,y,y_1)$ 或 $\Lambda(x,y,y_1)$ 是奇异的, 那么可选择轨线 C 使得线积分 (3.361) 是非奇异的. 这将用 3.6.3 节中的例子阐述. 因此, 可证得如下的定理:

定理 3.6.2.3 ODE (3.349) 的积分因子是积分确定系统 (3.365a,b) 的解 $\Lambda(x, y, y_1) \neq 0$. 对于给定的积分因子, 相应的 ODE (3.349) 的首次积分为线积分 (3.361). 相反地, 每个首次积分源于由特征方程 (3.352a,b) 产生的相应的积分因子.

积分确定系统 (3.365a,b) 是关于 $\Lambda(x, y, y_1)$ 的二阶线性齐次偏微分方程组. 如果知 ODE (3.349) 两个函数无关的首次积分 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1)$, 即 ψ_1 并不等于 ψ_2 的函数. 那么 (3.365a,b) 的通解为 $\Lambda(x, y, y_1) = F_{\psi_1}\Lambda_1 + F_{\psi_2}\Lambda_2$, 其中 $F = F(\psi_1, \psi_2)$ 是 ψ_1 和 ψ_2 的任意函数, 且 $\Lambda_1 = (\psi_1)_{y_1}, \Lambda_2 = (\psi_2)_{y_1}$. 因而, 求积分确定系统 (3.365a,b) 的所有解问题等价于解最初的 ODE (3.349). 然而, 由 (3.365a,b) 的任意特解可得首次积分, 其将 ODE (3.349) 约化为由曲面 $\psi(x, y, y_1) = \text{const} = c$ 确定的一阶 ODE. 如果积分确定系统 (3.365a,b) 的两个解产生函数无关的首次积分 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1)$, 那么 ODE (3.349) 约化为积分, 通过消去两个方程 $\psi_1(x, y, y_1) =\text{const}= c_1$ 和 $\psi_2(x, y, y_1) = \text{const} = c_2$ 中的 y_1. 根据两个基本常数 c_1 和 c_2, 这是 ODE (3.349) 的隐式通解.

注意, 对于某个函数 F, 如果两个首次积分满足关系 $\psi_2 = F(\psi_1)$, 那么对于相应的积分因子, 有 $\Lambda_2 = F'(\psi_1)\Lambda_1$. 这给出由积分因子确定系统的两个解可得到函数无关的首次积分的准则.

引理 3.6.2.1 (由积分因子求两个函数无关的首次积分的准则) ODE (3.349) 的两个积分因子 $\Lambda_1(x, y, y_1)$ 和 $\Lambda_2(x, y, y_1)$ 确定函数无关的首次积分 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1), \psi_2 \neq F(\psi_1)$ 当且仅当对所有函数 $F(\psi_1), \Lambda_2 \neq F'(\psi_1)\Lambda_1$ 或等价于 $\Lambda_1 \neq F'(\psi_2)\Lambda_2$, 其中根据 Λ_1 和 Λ_2, ψ_1 和 ψ_2 分别由线积分公式 (3.366) 确定.

作为引理 3.6.2.1 的推论, 我们得到如下关于函数无关的首次积分的充分准则:

定理 3.6.2.4 如果 ODE (3.349) 的积分因子 $\Lambda_1(x, y, y_1)$ 和 $\Lambda_2(x, y, y_1)$ 满足

$$\Lambda_2/\Lambda_1 \neq \text{const}, \quad (\Lambda_2/\Lambda_1)_{y_1} = 0, \tag{3.367}$$

那么由线积分公式 (3.366) 给出的相应的首次积分 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1)$ 是函数无关的.

证明 由 (3.367) 可知, 对于某个函数 $c(x, y)$, 有 $\Lambda_2/\Lambda_1 = c(x, y) \neq \text{const}$, 则由引理 3.6.2.1 知, $\Lambda_1(x, y, y_1)$ 和 $\Lambda_2(x, y, y_1)$ 确定函数无关的首次积分 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1)$ 当且仅当对于某个函数 $F(\psi_1)$, $c(x, y) = F'(\psi_1)$ 成立. 取这个关系的 $\partial/\partial y_1$, 得 $F''(\psi_1)\Lambda_1 = 0$, 因而有 $F'(\psi_1) = \text{const}$. 但是, 因为 $c(x, y) \neq \text{const}$, 可知 $\psi_1(x, y, y_1)$ 和 $\psi_2(x, y, y_1)$ 一定是函数无关的. □

3.6.3 二阶 ODEs 的首次积分

现在考虑几个有效的算法, 用来求二阶 ODE(3.349) 的积分因子确定系统 (3.365 a,b) 的解. 这种情况类似于求解对称确定方程 (参看 3.5.1 节), 其中, 对给定的二阶

ODE (3.349), 可以求它所拥有的全部的有限个点对称, 但是, 一般地, 为了求所拥有的一阶对称 (接触对称), 需要特殊的假设.

通过线积分公式 (3.366), 由所拥有的积分因子, 我们也给出了如何构造二阶 ODE (3.349) 的首次积分, 以及获得相应的 ODE 的阶的约化.

1. 点形式假设

如果考虑点形式的积分因子

$$\Lambda = \alpha(x,y) + \beta(x,y)y_1, \tag{3.368}$$

则积分因子确定系统 (3.365a,b) 约化为关于 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x,y)$ 的超定的线性偏微分方程组

$$2\alpha_y + \beta_x + 3y_1\beta_y + 2\beta f_{y_1} + \alpha f_{y_1y_1} + y_1\beta f_{y_1y_1} = 0, \tag{3.369a}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_{xx} + y_1\beta_{xx} + (y_1)^2\alpha_{yy} + (y_1)^3\beta_{yy} + 2y_1\alpha_{xy} + 2(y_1)^2\beta_{xy}\\ &- (\alpha f)_y + (\beta f)_x + (\alpha f_{y_1})_x + y_1(\beta f_{y_1})_x + y_1(\alpha f_{y_1})_y + (y_1)^2(\beta f_{y_1})_y = 0.\end{aligned} \tag{3.369b}$$

系统 (3.369a,b) 最多有有限个线性无关的解 $\alpha(x,y), \beta(x,y)$. 对于给定的函数 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x,y)$, ODE (3.49) 的相应的首次积分为

$$\begin{aligned}\psi(x,y,y_1) = &\int_C [(-f\alpha + y_1(\alpha_x + \alpha f_{y_1}) + (y_1)^2(\beta_x + \alpha_y + \beta f_{y_1}) + (y_1)^3\beta_y)\mathrm{d}x\\ &-(\alpha_x + \alpha f_{y_1} + y_1(\beta_x + \alpha_y + \beta f_{y_1}) + (y_1)^2\beta_y)\mathrm{d}y + (\alpha + \beta y_1)\mathrm{d}y_1],\end{aligned} \tag{3.370}$$

这里 C 是 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1)$ 到 (x,y,y_1) 的任意轨线.

现在建立一个有用的分类结果:

引理 3.6.3.1　二阶 ODE (3.349) 拥有点形式的积分因子 (3.368) 当且仅当 (3.349) 具有如下形式

$$\begin{aligned}y_2 = &-\frac{1}{2}(\log\beta)_y(y_1)^2 - \left[\frac{1}{2}(\log\beta)_x + \beta^{-1/2}(\alpha\beta^{-1/2})_y\right]y_1\\ &- \beta^{-1/2}(\alpha\beta^{-1/2})_x - (\alpha + \beta y_1)^{-1}(\gamma_x + \gamma_y y_1),\end{aligned} \tag{3.371}$$

其中 $\alpha(x,y), \beta(x,y), \gamma(x,y)$ 是函数. ODE (3.349) 的相应的首次积分为

$$\psi(x,y,y_1) = \frac{1}{2}\beta^{-1}(\alpha + \beta y_1)^2 + \gamma. \tag{3.372}$$

证明　由 (3.352b) 有

$$\psi_{y_1} = \Lambda = \alpha + \beta y_1. \tag{3.373}$$

关于 y_1, 积分 (3.373) 可得

$$\psi = \frac{1}{2}\beta(y_1)^2 + \alpha y_1 + \widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}\beta^{-1}\Lambda^2 + \gamma, \quad \gamma = \widetilde{\gamma} - \frac{1}{2}\beta^{-1}\alpha^2, \tag{3.374}$$

其中 $\widetilde{\gamma}(x,y)$ 为函数, 因此, 这产生首次积分 (3.372). 将 (3.374) 代入特征方程 (3.352a), 可得

$$\begin{aligned} D\psi &= \Lambda\beta^{-1}D\Lambda - \frac{1}{2}\Lambda^2\beta^{-2}D\beta + D\gamma \\ &= \Lambda\left(\beta^{-1}D\alpha + \frac{1}{2}(-\beta^{-2}\alpha + \beta^{-1}y_1)D\beta + \Lambda^{-1}D\gamma + y_2\right) = \Lambda(y_2 - f). \end{aligned}$$

因此得

$$f = -y_1 D(\log\beta) - \beta^{-1}D\alpha + \frac{1}{2}\beta^{-2}\alpha D\beta - (\alpha + \beta y_1)^{-1}D\gamma.$$

于是得 ODE (3.371). □

注意, 如果对于某些函数 $\alpha(x,y), \beta(x,y), \gamma(x,y)$, 可以将给定的 ODE (3.349) 匹配成 (3.371) 形式, 那么可得积分因子 (3.368), 且首次积分为 (3.372). 最重要的是, 对于源于点形式的积分因子的函数无关的首次积分, 由引理 3.6.3.1 所确定的分类可得引理 3.6.2.1 和定理 3.6.2.4 的更强的结论.

定理 3.6.3.1 假设 ODE (3.349) 拥有两个点形式的积分因子

$$\Lambda_1 = \alpha_1(x,y) + \beta_1(x,y)y_1, \quad \Lambda_2 = \alpha_2(x,y) + \beta_2(x,y)y_1, \quad \Lambda_1 \neq \Lambda_2. \tag{3.375}$$

则积分因子 (3.375) 确定 ODE (3.349) 的函数无关的首次积分, 如果当 $f_{y_1y_1y_1} \neq 0$ 时, Λ_1 和 Λ_2 是线性无关的, 或当 $f_{y_1y_1y_1} \equiv 0$ 时, $\Lambda_1 + c_1\sqrt{\beta_1}$ 和 $\Lambda_2 + c_2\sqrt{\beta_2}$ 是线性无关的, 其中 c_1, c_2 是常数.

证明 对于某个函数 F, 假设 $\psi_2 = F(\psi_1)$, 其中 $\psi_1(x,y,y_1)$ 和 $\psi_2(x,y,y_1)$ 是函数相关的首次积分, 其对应的积分因子为 $\Lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 y_1 = (\psi_1)_{y_1}$ 和 $\Lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 y_1 = (\psi_2)_{y_1}$. 定理 3.6.2.4 包括情况 $\beta_1 = \beta_2 = 0$. 以后假设 $\beta_1 \neq 0$. 进一步我们知道, 因为 $\Lambda_2 = F'(\psi_1)\Lambda_1$ 关于 y_1 是线性的, 所以一定满足

$$(F'\Lambda_1)_{y_1y_1} = 3\beta_1 F''\Lambda_1 + F'''(\Lambda_1)^3 = 0. \tag{3.376}$$

现在存在两种情况需要考虑: $F'''(\psi_1) \equiv 0$ 和 $F'''(\psi_1) \neq 0$. 第一种情况, (3.376) 给出 $F''(\psi_1) = 0$, 因此对于某些常数 c_1 和 c_2, 立即有 $F(\psi_1) = c_1\psi_1 + c_2$. 因而, 由 $\Lambda_2 = F'(\psi_1)\Lambda_1 = c_1\Lambda_1$ 可得 $\beta_2 = c_1\beta_1, \alpha_2 = c_1\alpha_1$.

对于情况 $F'''(\psi_1) \neq 0$, 由 (3.376) 可得 $3F''/F''' = -(\Lambda_1)^2/\beta_1$. 于是, 由 (3.372) 可知

$$-\frac{3}{2}\frac{F''}{F'''} = \frac{1}{2}\frac{(\Lambda_1)^2}{\beta_1} = \psi_1 - \gamma_1. \tag{3.377}$$

但是, 因为 F 仅仅依赖 ψ_1, 必定有 $\gamma_1 = \text{const}$, 从而

$$\frac{F'''}{F''} = -\frac{3}{2}\frac{1}{\psi_1 - \gamma_1}.$$

因此, 对于某些常数 $c_0, c_1, c_2 \neq 0$, 有 $F(\psi_1) = c_0 + c_1\psi_1 + c_2\sqrt{\psi_1 - \gamma_1}$. 将 (3.377) 的右侧代入 $\Lambda_2 = F'(\psi_1)\Lambda_1 = \left[c_1 + \frac{1}{2}c_2(\psi_1 - \gamma_1)^{-1/2}\right]\Lambda_1$, 可得

$$\beta_2 = c_1\beta_1, \quad \alpha_2 = c_1\alpha_1 + c_2\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\beta_1}. \tag{3.378}$$

最后, 由 (3.377), 并结合 (3.371) 和 (3.372), 知 $f(x, y, y_1)$ 是 y_1 的二次式, 因而 $f_{y_1y_1y_1} = 0$. □

作为展示如何发现点形式的积分因子, 非线性 Duffing 方程

$$y'' + ay' + by + y^3 = 0, \quad a = \text{const} \geqslant 0, \quad b = \text{const} \geqslant 0 \tag{3.379}$$

描述了非线性有阻尼的振荡器, 其中 a 是阻尼常数, 且 $\sqrt{b}/2\pi$ 是非阻尼线性振荡器的频率. 对于 ODE (3.79) 的点形式积分因子 (3.368), 积分因子确定系统 (3.369a,b) 为

$$2\alpha_y + \beta_x - 2a\beta + 3\beta_y y_1 = 0, \tag{3.380a}$$

$$\begin{aligned}&(\beta_{yy})(y_1)^3 + (2\beta_{xy} - a\beta_y + \alpha_{yy})(y_1)^2 + (-2a\beta_x + \beta_{xx} + 2\alpha_{xy})y_1 \\ &+ b\alpha + 3y^2\alpha - a\alpha_x + \alpha_{xx} - by\beta_x - y^3\beta_x + by\alpha_y + y^3\alpha_y = 0,\end{aligned} \tag{3.380b}$$

其是 y_1 的多项式. 因而, y_1 的幂级数的系数产生确定方程

$$\beta_y = 0, \quad \alpha_{yy} = 0, \tag{3.381a}$$

$$2\alpha_y + \beta_x - 2a\beta = 0, \tag{3.381b}$$

$$(b + 3y^2)\alpha - a\alpha_x + \alpha_{xx} - (by + y^3)\beta_x + (by + y^3)\alpha_y = 0. \tag{3.381c}$$

由 (3.381a) 知 $\beta = \beta(x)$ 和

$$\alpha = \alpha_0(x) + y\alpha_1(x), \tag{3.382}$$

其中 $\alpha_0(x), \alpha_1(x)$ 是某些函数. 则由 (3.381b) 得

$$\alpha_1 = a\beta - \frac{1}{2}\beta', \tag{3.383}$$

且 (3.381c) 变为关于 y 的多项式方程, 其分成方程

$$\alpha_0 = 0, \tag{3.384a}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}\beta', \tag{3.384b}$$

$$\alpha_1'' - a\alpha_1' + 2b\alpha_1 = b\beta'. \tag{3.384c}$$

通过组合 (3.383) 和 (3.384b), 可得

$$\beta = \beta_0 e^{(4a/3)x}, \quad \beta_0 = \text{const}, \tag{3.385a}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}a\beta_0 e^{(4a/3)x}. \tag{3.385b}$$

最后, 由 (3.384c) 得 $\frac{2}{9}a^3 = ba$, 所以有

$$a = 0 \quad \text{或者 } b = \frac{2}{9}a^2. \tag{3.386}$$

因而, ODE (3.379) 拥有简单的点形式的积分因子

$$\Lambda = \left(\frac{1}{3}ay + y_1\right) e^{(4a/3)x} \quad , \tag{3.387}$$

其中常数 a 和 b 满足 (3.386). 相应的首次积分可由线积分 (3.370) 求得. 如果选择轨线 C 是 $(0,0,0)$ 到 (x,y,y_1) 的分段直线, 且平行于坐标轴, 则由 (3.370) 得

$$\begin{aligned}\psi &= \int_0^x 0\mathrm{d}x + \int_0^y \left(\frac{1}{9}a^2y + y^3\right) e^{(4a/3)x}\mathrm{d}y + \int_0^{y_1} \left(\frac{1}{3}ay + y_1\right) e^{(4a/3)x}\mathrm{d}y_1 \\ &= \left(\frac{1}{18}a^2y^2 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}ayy_1 + \frac{1}{2}(y_1)^2\right) e^{(4a/3)x}.\end{aligned} \tag{3.388}$$

因此, 将 ODE (3.379) $\left(a = 0 \text{ 或 } b = \frac{2}{9}a^2\right)$ 约化为一阶 ODE $\psi(x,y,y_1) = \text{const} = c$. (3.7.3 节将表明如何获得第二个首次积分, 由其可得 ODE (3.379) 的完全积分).

2. 对称类型的假设

如果二阶 ODE (3.349) 拥有点对称

$$X = \xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.389}$$

那么一阶延拓的生成元

$$X^{(1)} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \eta^{(1)} = D\eta - y_1 D\xi \tag{3.390}$$

将 ODE (3.349) 的首次积分映成首次积分, 因为几何学上, 首次积分是 (x, y, y_1, y_2) 空间上曲面 (3.349) 的每个解曲线上的常数, 在该空间上, 二阶延拓生成元 $X^{(2)}$ 是切向量场 (参看 3.5.1 节). 因此, $X^{(1)}$ 描述 ODE (3.349) 的首次积分的切向量空间上的几何运动.

定理 3.6.3.2　假设 $\psi(x,y,y_1)$ 是具有积分因子 $\Lambda(x,y,y_1)$ 的 ODE (3.349) 的首次积分. 则 ODE (3.349) 所拥有的任意点对称 (3.389) 作用下, 由

$$\widetilde{\psi} = X^{(1)}\psi + \widetilde{c}, \quad \widetilde{c} = \text{const} \tag{3.391}$$

可得具有积分因子

$$\widetilde{\Lambda} = X^{(1)}\Lambda + R\Lambda \tag{3.392}$$

的首次积分, 其中

$$R \equiv \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial y_1} = \eta_y - \xi_x - 2y_1\xi_y. \tag{3.393}$$

证明　将 $X^{(2)}$ 应用于特征方程 (3.352a) 可得

$$(X^{(1)}\Lambda)(y_2 - f) + \Lambda(X^{(2)}(y_2 - f)) = X^{(2)}D\psi. \tag{3.394}$$

则由 (2.100a,b) 和 (3.124) 可得

$$\begin{aligned} X^{(2)}(y_2 - f) &= \eta^{(2)} - f_x\xi - f_y\eta - f_{y_1}\eta^{(1)} \\ &= D^2\eta - y_1D^2\xi - 2y_2D\xi - f_{y_1}(D\eta - y_1D\xi) - f_x\xi - f_y\eta \\ &= (\eta_y - y_1\xi_y - 2D\xi)(y_2 - f). \end{aligned} \tag{3.395}$$

因而, (3.394) 的左边变为

$$(X^{(1)}\Lambda + (R - D\xi)\Lambda)(y_2 - f).$$

下面, 用算子恒等式

$$DX^{(2)} - X^{(2)}D = (D\xi)D$$

估计 (3.394) 的右侧, 且该恒等式关于 x, y, y_1 的可微函数成立 (习题 3.6.17). 可得

$$D(X^{(1)}\psi) = (X^{(1)}\Lambda + R\Lambda)(y_2 - f), \tag{3.396}$$

因此可知, (3.392) 是对应于首次积分 (3.391) 的积分因子. □

由定理 3.6.3.2 知, 由 ODE (3.349) 的每个点对称可得其积分因子的向量空间上的点对称. (x, y, y_1, Λ) 空间上的显式生成元为

$$\widetilde{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \eta^{(1)}\frac{\partial}{\partial y_1} + R\Lambda\frac{\partial}{\partial \Lambda}, \tag{3.397}$$

其将积分因子映成 ODE (3.349) 的积分因子. 从而在尺度变换内, 能够考虑一个假设用来求 (3.397) 作用下保持不变的积分因子. 特别地, 对于这样的假设, 有

$$\widetilde{X}\Lambda = r\Lambda, \quad r = \text{const}, \tag{3.398}$$

或等价于

$$\xi\Lambda_x + \eta\Lambda_y + (\eta_x + y_1\eta_y - y_1\xi_x - (y_1)^2\xi)\Lambda_{y_1} + (\eta_y - \xi_x - 2y_1\xi_y - r)\Lambda = 0. \quad (3.399)$$

根据由解 (3.102) 确定的 $X^{(1)}$(习题 3.3.2) 的不变量 $u(x,y)$ 和 $\nu(x,y,y_1)(\nu_{y_1} \neq 0)$, 利用特征方法, 可求解一阶线性 PDE (3.399). 由此可得

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r-R}{\eta^{(1)}}\mathrm{d}y_1\right) w(u,\nu), \quad (3.400a)$$

其中 $w(u,v)$ 是任意函数, $\eta^{(1)} = \eta^{(1)}(u,v,y_1), R = R(u,v,y_1)$, 且 x 和 y 被 u 和 v 消去.

另外, 如果 $\xi \neq 0$, 则有

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r-R}{\xi}\mathrm{d}x\right) w(u,\nu), \quad (3.400b)$$

其中 $w(u,v)$ 是任意函数, $\xi = \xi(x,u), R = R(x,u,\nu)$, 且 y 和 y_1 被 u 和 v 消去.

如果 $\xi = 0$, 则可知

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r-R}{\eta}\mathrm{d}y\right) w(u,\nu), \quad (3.400c)$$

其中 $w(u,v)$ 是任意函数, $\eta = \eta(y,u), R = R(y,u,v)$, 且 x 和 y_1 被 u 和 v 消去.

注意, 假设 (3.398) 约化为相应于

$$X^{(1)}\Lambda = s\Lambda, \quad s = \text{const} \quad (3.401)$$

中的 Λ 的尺度不变性当且仅当 $R = \text{const}$ 且 $s = r - R$. 而且, 由定理 3.6.3.2 可知, R 上的条件对应于 $X^{(1)}$, 即作用下 $\psi(x,y,y_1)$ 的尺度不变性, 即

$$X^{(1)}\psi = r\psi + \widetilde{c}, \quad r = \text{const} = s + R, \quad (3.402)$$

其中 $\widetilde{c}$ 为常数. 所有满足 $R = \text{const}$ 的点对称很容易分类.

引理 3.6.3.2 二阶 ODE (3.349) 的点对称 (3.389) 为 $R \equiv \partial\eta^{(1)}/\partial y_1 = \text{const} = c$ 当且仅当对于某些函数 $\alpha(x), \beta(x)$, 有

$$\eta = \alpha(x) + (\beta'(x) + c)y, \quad \xi = \beta(x), \quad (3.403)$$

特别地, 所有平移 ($\xi = \text{const} = a, \eta = \text{const} = b$) 和所有尺度 ($\xi = ax, \eta = by, a = \text{const}, b = \text{const}$) 满足 $R = \text{const}$.

证明留作习题 3.6.19.

因此, 由引理 3.6.3.2 和定理 3.6.3.2 可知, 给定 ODE (3.349) 的任意平移和尺度对称自动地被它的积分因子确定系统 (3.365a,b) 所继承. 因而, 如果 ODE (3.349) 在那样对称作用下保持不变, 则根据相应的不变量 $u(x,y), v(x,y,y_1)$. 可考虑简单假设

$$\Lambda = w(u,v). \tag{3.404}$$

现在, 用几个例子来说明假设 (3.400a~c) 和 (3.404).

作为初等的第一个例子, 考虑一般的二阶线性齐次 ODE (参看 3.3.3 节)

$$y_2 + p(x)y_1 + q(x)y = 0, \tag{3.405}$$

其拥有尺度变换 $y \to \lambda y, x \to x$ 和迁移变换 $x \to x, y \to y + \varepsilon\phi(x)$, 其中 $\phi(x)$ 是 ODE(3.405) 的任意解, 即 $\phi'' + p(x)\phi' + q(x)\phi = 0$. 代表的对称不变量为 $u_{(1)} = x, v_{(1)} = y_1/y$ 和 $u_{(2)} = x, v_{(2)} = y_1 - y\phi'/\phi$. 用假设 (3.404) 且唯一的联合不变量 $u = x$, 求积分确定系统 (3.369a,b) 的如下形式的解

$$\Lambda = w(x). \tag{3.406}$$

将 (3.406) 代入 (3.369a,b) 可得单个的方程

$$w'' - (p(x)w)' + q(x)w = 0, \tag{3.407}$$

其是 ODE (3.405) 的伴随. ODE (3.407) 称为 (3.405) 的古典积分因子的确定方程. 如果知道 ODE (3.407) 的一个解, 那么, 通过

$$\begin{aligned}\psi(x,y,y_1) &= \int_C [(qyw + y_1w')\mathrm{d}x - (w' - pw)\mathrm{d}y + w\mathrm{d}y_1] \\ &= \int_0^x 0\mathrm{d}x - (w' - pw)\int_0^y \mathrm{d}y + w\int_0^{y_1} \mathrm{d}y_1 \\ &= -(w' - pw)y + wy_1,\end{aligned}$$

由 (3.370) 可得 ODE (3.405) 的首次积分, 其中 C 是 $(0,0,0)$ 到 (x,y,y_1) 的分段直线, 且平行于坐标轴.

考虑二阶线性 ODE (3.405), 例如 $p(x) = 4/x, q(x) = 2/x^2$, 其产生 Euler 方程

$$y_2 + \frac{4}{x}y_1 + \frac{2}{x^2}y = 0, \tag{3.408}$$

它拥有尺度对称 $x \to \lambda x, y \to y$. 在 3.5.3 节中, 利用对称约化, 我们推导 ODE (3.408) 的首次积分 (3.294). 这里, 基于关于 x,y 的尺度变换和关于 y 的迁移变换作用下的不变性, 利用假设 (3.400b,c), 求积分因子和相应的首次积分.

对于 x 的尺度对称 ($\eta = 0$ 和 $\xi = x$) , 由 (3.393) 得 $R = -1$, 因此, 根据尺度不变量 x 和 xy_1, 假设由 (3.400b) 可得 $\Lambda = x^{r+1}w(y, xy_1)$. 类似地, 对于 y 的尺度对称 ($\eta = y$ 和 $\xi = 0$) , 因此, 根据尺度不变量 x 和 y_1/y, 假设由 (3.400c) 可得 $\Lambda = y^{r-1}w(x, y_1/y)$. 最后, 对于迁移对称 ($\eta = \phi(x)$ 和 $\xi = 0$), 有 $R = 0$ 和 $\Lambda = \mathrm{e}^{ry/\phi}w(x, y_1 - y\phi'/\phi)$. 从而, Λ 的共同的不变量形式为

$$\Lambda = x^s, \quad s = \text{const}. \tag{3.409}$$

将 (3.409) 代入积分因子确定方程 (3.407), 易得解

$$\Lambda_1 = x^2, \quad \Lambda_2 = x^3. \tag{3.410}$$

由定理 3.6.2.4 可知, 解 (3.410) 确定了由线积分公式 (3.370) 给出的两个函数无关的首次积分. 因为 ODE (3.408) 在 $x = 0$ 点是奇异的, 所以选择轨线是 $(\widetilde{x}, 0, 0)$ 到 (x, y, y_1) 的平行于坐标轴的分段直线, 且 $\widetilde{x} \neq 0$. 那么, (3.370) 产生首次积分

$$\psi_1 = \int_{\widetilde{x}}^{x} 0\mathrm{d}x + \int_0^y 2x\mathrm{d}y + \int_0^{y_1} x^2\mathrm{d}y_1 = 2xy + x^2y_1, \tag{3.411a}$$

$$\psi_2 = \int_{\widetilde{x}}^{x} 0\mathrm{d}x + \int_0^y x^2\mathrm{d}y + \int_0^{y_1} x^3\mathrm{d}y_1 = x^2y + x^3y_1. \tag{3.411b}$$

因而, 由 $\psi_1 = \text{const} = c_1$ 和 $\psi_2 = \text{const} = c_2$ 可得两个求积分, 给出了 ODE (3.408) 的完全约化. 显式地, 通过消去 $\psi_1 = c_1$ 和 $\psi_2 = c_2$ 中的 y_1, 有

$$y = c_1x^{-1} - c_2x^{-2}. \tag{3.412}$$

作为最后一个例子, 考虑 ODE

$$y_2 = 2\frac{(xy_1 - y)(1 + (y_1)^2)}{x^2 + y^2}, \tag{3.413}$$

其拥有旋转对称 (参看习题 3.3.9)

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{i.e.,} \quad \xi = y, \eta = -x. \tag{3.414}$$

由 (3.393) 可知, $R = -2y_1$. 因为 $R \neq \text{const}$, 所以根据满足 $Xu = 0, X^{(1)}v = 0$ 的旋转不变量

$$u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{(y - xy_1)^2}{1 + (y_1)^2}, \tag{3.415}$$

求由一般假设 (3.400a) 给出的 (3.413) 的积分因子. 因为 $\eta^{(1)} = -(1 + (y_1)^2)$, 所导致的假设为

$$\Lambda = \mathrm{e}^{-r\arctan y_1}(1 + (y_1)^2)^{-1}w(u, v), \quad r = \text{const}.$$

为了简单, 取 $r=0$. 由 (3.398) 可知, 这对应于 $\widetilde{X}=X^{(1)}+R\Lambda\dfrac{\partial}{\partial\Lambda}$ 作用下 Λ 的不变性. 因此, 对于假设

$$\Lambda=(1+(y_1)^2)^{-1}w(u,v), \tag{3.416}$$

积分因子确定系统 (3.365a,b) 变为

$$2uw_u+(9v-6u)w_v+2u(v-u)w_{vu}+4v(v-u)w_{vv}=0, \tag{3.417a}$$

$$3u^2w_u+4v^2w_v+4uv(u-v)w_{vu}+2u^2(u-v)w_{uu}=0. \tag{3.417b}$$

易知 $w=\text{const}$ 满足 (3.417a,b). 因而, 获得单个的积分因子

$$\Lambda_1=(1+(y_1)^2)^{-1}. \tag{3.418}$$

相应的 ODE (3.413) 的首次积分由线积分公式 (3.366) 确定, 这里其变为

$$\psi_1=\int_C\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{2x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\frac{1}{1+(y_1)^2}\mathrm{d}y_1\right]. \tag{3.419}$$

因为 (3.419) 中的被积函数在 $x=y=0$ 点是奇异的, 所以取 C 是 $(\widetilde{x},\widetilde{y},0)$ 到 (x,y,y_1) 的平行于坐标轴的分段直线, 且 $\widetilde{x}\neq 0,\ \widetilde{y}\neq 0$. 于是有

$$\begin{aligned}\psi_1&=\int_{\widetilde{x}}^{x}\frac{2\widetilde{y}}{x^2+\widetilde{y}^2}\mathrm{d}x+\int_{\widetilde{y}}^{y}\frac{-2x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+\int_0^{y_1}\frac{1}{1+(y_1)^2}\mathrm{d}y_1\\&=-2\arctan\frac{y}{x}+\arctan y_1-2\arctan\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}}+\pi.\end{aligned} \tag{3.420}$$

令 $\widetilde{y}=0$ 且 $\widetilde{\psi}_1=\tan\psi_1$, 得简化的首次积分

$$\widetilde{\psi}_1=\frac{y_1(y^2-x^2)+2xy}{y^2-x^2-2xyy_1}. \tag{3.421}$$

下面, 充分利用 ODE (3.413) 的尺度对称 $x\to\lambda x, y\to\lambda y$, 由确定系统 (3.417a,b) 求另一个积分因子. 如果进一步限制假设 (3.416) 是尺度不变量, 那么有 $w(u,v)=w(z)$, 且 $z=v/u$, 因此可得

$$\Lambda=(1+(y_1)^2)^{-1}w(z). \tag{3.422}$$

这就积分因子确定系统 (3.417a,b) 简化了 ODE

$$u(4v-3u)w'+2v(v-u)w''=0. \tag{3.423}$$

ODE (3.423) 的通解是 $w_1=1$ 和

$$w_2=(uv^{-1}-1)^{1/2} \tag{3.424}$$

的线性组合. 因而, 由 (3.424) 知, 可得第二个积分因子

$$\Lambda_2 = (1+(y_1)^2)^{-1}\left(\frac{(x^2+y^2)(1+(y_1)^2)}{(y-xy_1)^2}-1\right)^{1/2} = \frac{x+yy_1}{(y-xy_1)(1+(y_1)^2)}. \quad (3.425)$$

现在, 检查满足引理 3.6.2.1 准则的积分因子 (3.425) 产生一个首次积分, 其与 (3.420) 是函数无关的. 首先, 由 (3.419), 因为 $X^{(1)}\psi_1 = y(\psi_1)_x - x(\psi_1)_y - (1+(y_1)^2)(\psi_1)_{y_1} = 1$ 是非零的, 由此可知, ψ_1 并不仅仅是 $z=v/u$ 的函数. 因此由假设 (3.422) 和 (3.424) 可知, 对任意函数 $F(\psi_1)$, 有 $w_2(z)=\Lambda_2/\Lambda_1 \neq F'(\psi_1)$. 因而, 对应于 Λ_1 和 Λ_2 的首次积分是函数无关的. 由线积分公式 (3.366) 得

$$\psi_2 = \int_C \left[\frac{y_1(y^2-x^2)-2xy}{(y-xy_1)(x^2+y^2)}\mathrm{d}x - \frac{x^2-y^2+2xyy_1}{(y-xy_1)(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \frac{x+y_1y}{(y-xy_1)(1+(y_1)^2)}\mathrm{d}y_1\right].$$

因为在 $x=y=0$ 点被积函数是奇异的, 所以取 C 为从 $(\widetilde{x},\widetilde{y},0)$ 到 (x,y,y_1) 的平行于坐标轴的分段直线, 且 $\widetilde{x}\neq 0, \widetilde{y}\neq 0$, 得首次积分

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \int_{\widetilde{x}}^{x} \frac{2x}{(x^2+\widetilde{y}^2)}\mathrm{d}x + \int_{\widetilde{y}}^{y}\frac{y^2-x^2}{y(x^2+y^2)}\mathrm{d}y + \int_0^{y_1}\frac{x+y_1y}{(y-xy_1)(1+(y_1)^2)}\mathrm{d}y_1 \\ &= -\log(y-xy_1) + \frac{1}{2}\log(1+(y_1)^2) + \log(x^2+y^2) - \log(\widetilde{x}^2+\widetilde{y}^2) + \log\widetilde{y}.\end{aligned} \quad (3.426)$$

对 (3.426) 取幂, 在相差一个常数倍的条件下, 得简化的首次积分

$$\widetilde{\psi}_2 = \frac{(1+(y_1)^2)^{1/2}(x^2+y^2)}{y-xy_1}. \quad (3.427)$$

由首次积分 (3.427) 和 (3.421) 可得 ODE (4.413) 的完全约化 (求积分), 其由 $\widetilde{\psi}_1 = \text{const} = c_1, \widetilde{\psi}_2 = \text{const} = c_2$ 给定. 通过消去 y_1, 显式地得

$$c_2(y+c_1x) = \sqrt{1+(c_1)^2}(x^2+y^2), \quad (3.428)$$

其为 ODE (3.413) 的通解.

3. *消元假设*

现在考虑用以消去变量 x 和 y 中的一个的假设. 注意, 消去 y_1 是点形式假设 (3.368) 的特殊情况.

首先, 假设

$$\Lambda = \mu(x, y_1), \quad (3.429)$$

即 Λ 不依赖 y. 根据特征方程 (3.352a,b), 直接按所拥有的积分因子 (3.429) 所有的二阶 ODE (3.349) 进行分类. 关于 $\psi_{y_1} = \mu(x,y_1)$, 积分 y_1, 有

$$\psi = a(x,y_1) + b(x,y), \quad a_{y_1} = \mu. \quad (3.430)$$

将 (3.430) 代入特征方程 (3.352a), 得

$$-a_{y_1}f = a_x + b_x + y_1 b_y. \tag{3.431}$$

因此, 由 (3.430) 和 (3.431) 得下面的分类:

定理 3.6.3.3 二阶 ODE (3.349) 拥有积分因子 (3.429) 当且仅当 ODE (3.349) 具有形式

$$y_2 = f(x, y, y_1) = \frac{y_1 \nu_y(x,y) + \nu_x(x,y) - \int \mu_x(x, y_1)\mathrm{d}y_1}{\mu(x, y_1)}, \tag{3.432}$$

其中 $\nu(x,y), \mu(x,y_1)$ 是函数. 相应的首次积分为

$$\psi(x, y, y_1) = \int \mu(x, y_1)\mathrm{d}y_1 - \nu(x,y). \tag{3.433}$$

如果对某些函数 $\nu(x,y), \mu(x,y_1)$, 将给定的 ODE (3.349) 匹配成形式 (3.432), 那么立即可得到首次积分 (3.433).

考虑如下形式的积分因子

$$\Lambda = \mu(y, y_1). \tag{3.434}$$

通过与证明定理 3.6.3.3 的同样的步骤, 直接按所拥有的积分因子 (3.429) 所有的二阶 ODE (3.349) 进行分类. 获得下面的结论:

定理 3.6.3.4 二阶 ODE (3.349) 拥有积分因子 (3.434) 当且仅当 ODE (3.349) 具有形式

$$y_2 = f(x, y, y_1) = \frac{y_1\left(\nu_y(x,y) - \int \mu_y(y, y_1)\mathrm{d}y_1\right) + \nu_x(x,y)}{\mu(y, y_1)}, \tag{3.435}$$

其中 $\nu(x,y), \mu(y,y_1)$ 是函数. 相应的首次积分为

$$\psi(x, y, y_1) = \int \mu(y, y_1)\mathrm{d}y_1 - \nu(x,y). \tag{3.436}$$

如果对某些函数 $\nu(x,y), \mu(y,y_1)$, 将给定的 ODE (3.349) 匹配成形式 (3.435), 那么立即可得到首次积分 (3.436).

可以自动地将给定 ODE (3.349) 匹配成 (3.432) 或 (3.435) (Cheb-Terrab, Roche, 1999). 特别地, 由积分因子确定系统 (33.365a,b), 对于函数 $f(x,y,y_1)$, 容易推导充要条件满足 (3.432) 或 (3.435).

组合定理 3.6.3.3 和定理 3.6.3.4, 可得仅仅依赖 y_1 的积分因子.

推论 3.6.3.1 二阶 ODE (3.349) 拥有积分因子 $\Lambda = \mu(y_1)$ 当且仅当 ODE (3.349) 具有形式

$$y_2 = f(x, y, y_1) = \frac{\nu_x(x, y) + y_1 \nu_y(x, y)}{\mu(y_1)}, \tag{3.437}$$

其中 $\nu(x, y), \mu(y_1)$ 是函数. 相应的首次积分为

$$\psi(x, y, y_1) = \int \mu(y_1) \mathrm{d}y_1 - \nu(x, y). \tag{3.438}$$

注意, 对于任意函数 $a(y), b(y_1)$ 特殊形式的 ODE (3.437) 为可分离二阶 ODE

$$y_2 = \frac{a(y)}{b(y_1)}. \tag{3.439}$$

ODE (3.439) 可约化为求积分, 因为由首次积分 (3.438) 可得

$$\psi = -\int a(y) \mathrm{d}y + \int y_1 b(y_1) \mathrm{d}y_1 = \text{const} = c_1,$$

其代表由 y, y_1 的代数表达式给定的一阶可分离的 ODE (参看 3.6.1 节)

$$\int y_1 b(y_1) \mathrm{d}y_1 = c_1 + \int a(y) \mathrm{d}y. \tag{3.440}$$

因而, 如果用 $y_1 = g(y; c_1)$ 表示 (3.440) 的可解形式, 那么求积分

$$\int \frac{1}{g(y; c_1)} \mathrm{d}y - x = \text{const} = c_2, \tag{3.441}$$

可得 ODE (3.439) 的通解.

3.6.4 三阶和高阶 ODEs 的积分因子的确定方程

考虑三阶或高阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \quad n \geqslant 3, \tag{3.442}$$

或等价于曲面

$$y_n - f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = 0. \tag{3.443}$$

定理 3.6.4.1 具有依赖 $y^{(n-1)}$ 的函数 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 是 ODE (3.442) 的首次积分, 且在曲面 (3.443) 上满足 $\psi(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) = \text{const} = c$, 当且仅当

$$D\psi|_{y_n = f} = D\psi = \psi_x + y_1 \psi_y + \cdots + y_{n-1} \psi_{y_{n-2}} + f \psi_{y_{n-1}} = 0, \tag{3.444}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + \cdots + y_n \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, \tag{3.445a}$$

$$D = D|_{y_n=f} = D - (y_n - f)\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}. \tag{3.445b}$$

ODE (3.442) 的相应的 ℓ 阶积分因子是由特征方程

$$D\psi = (y_n - f)\Lambda \tag{3.446a}$$

确定的函数 $\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)}) \not\equiv 0, 0 \leqslant \ell \leqslant n-1$, 且

$$\Lambda(x, y, y', \cdots, y^{(\ell)}) = \psi_{y_{n-1}}, \tag{3.446b}$$

(3.446b) 等价于 (3.444). 通过满足 (3.446a,b) 的积分因子, 可得到 ODE (3.442) 的所有首次积分.

现在推导确定系统, 用来求得 ODE (3.442) 的所有阶 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 的积分因子. 考虑截断的 Euler 算子

$$E_n = \sum_{i=0}^{n}(-D)^i\frac{\partial}{\partial y_i}, \quad 其中\ y_0 = y. \tag{3.447}$$

令

$$\theta(x, y, y_1, \cdots, y_n) = D\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}), \tag{3.448}$$

且归纳定义

$$\Psi_n = \theta_{y_n}, \tag{3.449a}$$

$$\Psi_{n-k} = \theta_{y_{n-k}} - D\Psi_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.449b}$$

其中

$$\Psi_0 = E_n(\theta). \tag{3.449c}$$

下面的结论表明, 截断 Euler 算子 (3.447) 与消除 $x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 的可微函数的全导数有联系.

定理 3.6.4.2 函数 $\theta(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 是全导数 (3.448) 当且仅当在 $(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 空间上满足

$$\frac{\partial \Psi_{n-k}}{\partial y_n} = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{3.450a}$$

$$\Psi_0 = 0. \tag{3.450b}$$

因此, (3.448) 成立, 且

$$\begin{aligned}\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = \int_C \Bigg[&\theta(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, 0)\mathrm{d}x \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1}\Psi_i(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})(\mathrm{d}y_{i-1} - y_i\mathrm{d}x)\Bigg],\end{aligned} \tag{3.451}$$

其中 C 是 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1,\cdots,\widetilde{y}_{n-1})$ 到 $(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的任意轨线.

证明 首先, 对于某个函数 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$, 假设函数 $\theta(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 满足 (3.448). 因而, 由恒等式

$$(D\psi)_y = D\psi_y, \tag{3.452a}$$

$$(D\psi)_{y_i} = D\psi_{y_i} + \psi_{y_{i-1}}, \quad i=1,2,\cdots,n, \quad \text{其中 } y_0 = y, \tag{3.452b}$$

且 $\psi_{y_n}=0$, 可知

$$\begin{aligned}E_n(D\psi) &= \sum_{i=0}^{n}(-D)^i(D\psi)_{y_i}\\ &= -\sum_{i=0}^{n}(-D)^{i+1}\psi_{y_i} + \sum_{i=1}^{n}(-D^i)\psi_{y_{i-1}} = (-1)^n D^n\psi_{y_n} = 0.\end{aligned}$$

从而 (3.450b) 成立. 另外, 将 (3.448) 代入 (3.449a,b) 得

$$\Psi_i = \psi_{y_{i-1}}, \quad i=1,2,\cdots,n. \tag{3.453}$$

因为由 $\psi_{y_n}=0$ 可知 $(\Psi_i)_{y_n} = \psi_{y_n y_{i-1}} = 0$, 因而得 (3.450a).

令

$$\Phi = \theta - \sum_{i=1}^{n} y_i\Psi_i, \tag{3.454}$$

由 (3.448) 和 (3.453) 可知, (3.454) 满足

$$\Phi = \psi_x. \tag{3.455}$$

那么, $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的存在性的可积条件为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial\Psi_i}{\partial y_n} = 0, \quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3.456a}$$

$$\frac{\partial\Psi_i}{\partial y_j} = \frac{\partial\Psi_{j+1}}{\partial y_{i-1}}, \quad j=0,1,\cdots,n-1, i=1,2,\cdots,n, \tag{3.456b}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_j} = \frac{\partial\Psi_{j+1}}{\partial x}, \quad j=0,1,\cdots,n-1. \tag{3.456c}$$

相反地, 假设函数 $\theta(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 满足 (3.450a,b). 继续证明可积条件 (3.456 a~c) 成立. 令

$$\Psi_{i,j} = \frac{\partial\Psi_i}{\partial y_{j-1}} - \frac{\partial\Psi_j}{\partial y_{i-1}}, \quad i=1,2,\cdots,n, j=i,\cdots,n, \tag{3.457a}$$

$$\Psi_{i,n+1} = \frac{\partial\Psi_i}{\partial y_n}, \quad i=0,1,\cdots,n. \tag{3.457b}$$

建立下面的恒等式

$$\Psi_{j,n+1} = -\Psi_{j+1,n} - D\Psi_{j+1,n+1}, \quad j = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{3.458a}$$

$$\Psi_{j,m} = -\Psi_{j+1,m-1} - \mathrm{D}\Psi_{j+1,m}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1, m = 1, 2, \cdots, n, \tag{3.458b}$$

$$\Psi_{m,m} = 0, \quad m = 1, 2, \cdots, n,$$

其成立与 (3.405a,b) 无关. 为了求得 (3.458b), 首先将 $\partial/\partial y_m$ 应用于 (3.449b) 且减去 (3.449b) 的 $\partial/\partial y_j$, $n-k=j$, $n-k=m$. 则利用 (3.457a) 组合这些项. 类似地, 可得 (3.458b).

现在考虑 $\Psi_{m,k}$ $(k > m \geqslant 1)$. 如果 $k - m = 2\ell + 1$, 那么反复利用 (3.458b) 可知, $\Psi_{m,m+2\ell+1}$ 是 $D^{2i}\Psi_{j,j+1}, j = m+\ell+i, i = 0, 1, \cdots, \ell$ 的线性组合. 类似地, 如果 $k - m = 2\ell$, 那么 $\Psi_{m,m+2\ell}$ 是 $D^{2i+1}\Psi_{j,j+1}, j = m+\ell+i, i = 0, 1, \cdots, \ell-1$ 的线性组合. 继续考虑 (3.458a) 且 $j = n-2$, 由 (3.450a) 可知

$$\Psi_{n-1,n} = -\Psi_{n-2,n+1} + D\Psi_{n-1,n+1} = -\frac{\partial\Psi_{n-2}}{\partial y_n} + D\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial y_n} = 0.$$

同样地, 对于 $j = n-4, n-6, \cdots, 1$ 或 0(n 分别为奇数或者偶数), 反复利用 (3.450a) 和 (3.458a), 得到

$$\Psi_{m,m+1} = 0, \quad m = n-\ell, \cdots, n-1, \tag{3.459}$$

其中 $\ell = n/2$, 当 n 是偶数时, 或 $\ell = (n-1)/2$, 当 n 是奇数时. 组合上面的结论, 对于所有的 $1 \leqslant m \leqslant k \leqslant n$, 有

$$\Psi_{m,k} = 0, \tag{3.460}$$

因此 (3.456b) 成立. 那么由 (3.454) 和 (3.457b), 通过用 (3.449b) 和情况 $k = 0$ 的 (3.450b), 可得

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_k} = \theta_{y_k} - \Psi_k - \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial\Psi_i}{\partial y_k} = \frac{\partial\Psi_{k+1}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} y_i \Psi_{k+1,i}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

因而, 由 (3.460) 得 (3.456c). 最后, 由 (3.450a) 得 (3.456a). 从而, 作为 (3.450a,b) 的结论, 所有可积条件 (3.456a~c) 成立, 且存在函数 $\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 满足 (3.448).

最后, 根据 $\theta(x, y, y_1, \cdots, y_n)$, 由关系 (3.453) 和 $\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 的偏导数 (3.455), 在相差一个常数情况下, 关于梯度的微积分基本定理为

$$\psi = \int_C \left[\psi_x \mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{y_i} \mathrm{d}y_i\right] = \int_C \left[\Phi \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \Psi_i \mathrm{d}y_{i-1}\right], \tag{3.461}$$

其中 C 是 $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{y}_1, \cdots, \widetilde{y}_{n-1})$ 到 $(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 的任意轨线. 因此, 由 (3.461), (3.454) 和 (3.456a) 可得线积分 (3.451). □

显然, 利用恒等式 (3.458a,b), 定理 3.6.4.2 中的系统 (3.450a,b) 的方程能够约化为较简单的具有一半个数的方程组. 用标记 $[q]$ 表示小于或等于给定的有理数的最大整数 q.

引理 3.6.4.1 对于 $k=2m, m=0,1,\cdots,[n/2]$, 方程 (3.450a) 与 (3.450b) 等价于含有 $2+[n/2]$ 个无关的方程的系统

$$\theta_{y_n y_n}=0, \tag{3.462a}$$

$$\theta_{y_k y_k}|_{y_n=0}=\sum_{i=1}^{n-k}\sum_{j=1}^{i}(-1)^i(i+j)\frac{(i-1)!}{(i-j)!j!}(D^{i-j}\theta_{y_{k+j}y_{k-j}})|_{y_n=0},$$
$$k=\left[\frac{n+1}{2}\right],\cdots,n-1, \tag{3.462b}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(D^i\theta_{y_i})|_{y_n=0}=0. \tag{3.462c}$$

剩余的方程 (3.450a) ($k=2m+1, m=0,1,\cdots,[(n-1)/2]$) 是 (3.462a,b) 的 (可微) 线性组合.

证明 利用 (3.458a,b) 来递归. 对于 $k=n-1$, 可得

$$\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial y_n}=-D\frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}.$$

则对于 $k=n-2$ 和 $k=n-3$, 有

$$\frac{\partial\Psi_{n-2}}{\partial y_n}=D^2\frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}-\Psi_{n-1,n},\quad \frac{\partial\Psi_{n-3}}{\partial y_n}=-D^3\frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}+2D\Psi_{n-1,n}.$$

且 $\partial\Psi_{n-2\ell-1}/\partial y_n, \ell=0,1,\cdots,[(n-1)/2]$ 是 $\partial\Psi_n/\partial y_n$ 和 (如果 $\ell\geqslant 1$)$\Psi_{j,j+1}, j=n-\ell,\cdots,n-1$ 的微分线性组合. 另外, 知 $\Psi_{j,j+1}, j=[(n+1)/2],\cdots,n-1$ 是 $\partial\Psi_{n-2i}/\partial y_n, i=1,\cdots,n-j$ 的微分线性组合. 因而, $\partial\Psi_{n-2\ell-1}/\partial y_n$ 可以表示为 $\partial\Psi_{n-2i}/\partial y_n, i=0,1,\cdots,\ell$ 的微分线性组合, 因此建立了引理的第二部分. 由 (3.458 a,b) 可知, 方程 $\partial\Psi_{n-2\ell}/\partial y_n=0, \ell=0,1,\cdots,[n/2]$ 等价于系统

$$\frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}=0, \tag{3.463}$$

$$\Psi_{j,j+1}=0,\quad j=\left[\frac{n+1}{2}\right],\cdots,n-1. \tag{3.464}$$

注意, (3.463) 和 (3.449a,b) 表明 Ψ_{n-k} 等于 $\Psi_{n-k}|_{y_n=0}$ 加上 y_n 的 k 次多项式 ($k\geqslant 1$) 且系数由 $\partial\Psi_{n-i}/\partial y_n, i=0,1,\cdots,k-1, k=1,2,\cdots,n$ 的微分线性组合确定. 从而可断定, (3.450a,b) 等价于系统

$$\frac{\partial\Psi_n}{\partial y_n}=0,\quad \Psi_0|_{y_n=0}=0,\quad \Psi_{j,j+1}|_{y_n=0}=0,\quad j=[(n+2)/2],\cdots,n-1,$$

其分别是由 (3.462a~c) 且通过 (3.457a,b) 和 (3.449a,b) 给定的. 而且, 因为 (3.462a, b) 中的项 $\theta_{y_k y_k}, k=[(n+1)/2],\cdots,n$ 是线性无关的, 所以知方程 (3.462a~c) 是无关的. 这就建立了引理的第一部分.

现在, 由特征方程 (3.446a), 令

$$\theta(x,y,y_1,\cdots,y_n)=(y_n-f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}))\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell),\quad 0\leqslant\ell\leqslant n-1. \tag{3.465}$$

取 (3.465) 的 $\partial/\partial y_{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$, 得

$$\theta_{y_n}=\Lambda, \tag{3.466a}$$

$$\theta_{y_{n-k}}\,|_{y_n=0}=-(f\Lambda)_{y_{n-k}},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{3.466b}$$

则由 (3.349a,b) 得

$$\Psi_n=\theta_{y_n}=\Lambda \tag{3.467a}$$

和

$$\begin{aligned}\Psi_{n-k}\,|_{y_n=0}&=\sum_{j=0}^{k}((-D)^j\theta_{y_{n-k+j}})\,|_{y_n=0}\\&=\sum_{j=0}^{k-1}-(-D_{n-1})^j(f\Lambda)_{y_{n-k+j}}+(-D_{n-1})^k\Lambda,\quad k=1,2,\cdots,n,\end{aligned} \tag{3.467b}$$

其中 D_{n-1} 是截断的全导数算子, 且定义为

$$D_k=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i=1}^{k}y_i\frac{\partial}{\partial y_{i-1}},\quad k\geqslant 1. \tag{3.468}$$

最后, 由 (3.454) 和 (3.468) 可知

$$\begin{aligned}\Phi\,|_{y_n=0}&=\theta\,|_{y_n=0}-\sum_{i=1}^{n-1}y_i\Psi_i\,|_{y_n=0}\\&=-f\Lambda+\sum_{i=1}^{n-i}y_i\left(\sum_{j=1}^{n-i-1}(-D_{n-1})^j(f\Lambda)_{y_{i+j}}+(-D_{n-1})^{n-i}\Lambda\right).\end{aligned} \tag{3.469}$$

因而, 对 ODE (3.443) 的所有积分因子, 定理 3.6.4.2 和引理 3.6.4.1 给出了包含 $1+[n/2]$ 个方程 (3.462b,c) 的充要的确定系统. 利用 (3.446a,b) 和 (3.467a,b), 总的系统可以显式地写为

$$(f\Lambda)_{y_{n-m}y_{n-m}}+\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{(i+j)(i-1)!}{(i-j)!j!}(-1)^i(D_{n-1})^{i-j}(f\Lambda)_{y_{n-m+i}y_{n-m-j}}$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{i=0}^{m}\frac{(i+m)(m-1)!}{(m-i)!i!}(D_{n-1})^{m-i}\Lambda_{y_{n-m-i}}=0,\quad m=1,\cdots,\left[\frac{n}{2}\right],\tag{3.470a}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(D_{n-1})^i(f\Lambda)_{y_i}+(-1)^{n-1}(D_{n-1})^n\Lambda=0.\tag{3.470b}$$

而且, 通过 (3.467a) 和 (3.469) 及组合 (3.451), 由显式的线积分公式

$$\psi=\int_C\left[\Lambda(\mathrm{d}y_{n-1}-f\mathrm{d}x)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-i-1}-(-D_{n-1})^j(f\Lambda)_{y_{i+j}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(-D_{n-1})^{n-i}\Lambda\right)(\mathrm{d}y_{i-1}-y_i\mathrm{d}x)\right],\tag{3.471}$$

可得对应于积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的首次积分 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$, 其中 C 是 $(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 空间上从 $(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{y}_1,\cdots,\widetilde{y}_{n-1})$ 到 $(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的轨线. 如果 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 和 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 非奇异, 那么 C 可以被选为任意的, 因此, 可用任意方便的途径来简化这个积分. 最重要的, 如果 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 或者 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是奇异的, 那么可选择某个轨线, 使得线积分 (3.471) 是非奇异的. □

定理 3.6.4.3 ODE (3.443) 的阶 $0\leqslant\ell\leqslant n-1$ 的积分因子是含有 $1+[n/2]$ 个方程 (3.470a,b) 的确定系统的解 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)\neq 0$. 对于给定的积分因子, ODE (3.443) 的相应的首次积分由线积分公式 (3.471) 确定.

积分因子确定系统 (3.470a,b) 是关于 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的含有 $1+[n/2]$ 个 n 阶线性齐次 PDEs 的系统. 由 (3.470a,b) 的任意解可得首次积分 (3.471), ODE (3.443) 的阶降一次使得得到由曲面 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})=\text{const}=c$ 表示的 $(n-1)$ 阶 ODE. 如果知道积分确定系统 (3.470a,b) 的 $1<k\leqslant n$ 个解, 使得所得到的 k 个首次积分 $\psi_1,\cdots,\psi_k$ 是函数无关的, 即任一首次积分都不是其他首次积分的函数, 那么 ODE (3.443) 约化为 $(n-k)$ 阶 ODE, 该 ODE 是由消去方程 $\psi_i(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})=\text{const}=c_i, i=1,2,\cdots,k$ 中的 $y_{n-1},\cdots,y_{n-k+1}$ 来给定的. 因而, 如果 $k=n$, 这将 ODE (3.443) 完全约化为求积分.

易知, 首次积分集 $\psi_i, i=1,2,\cdots,k$ 是函数无关的, 当且仅当对于某些非常数的函数 $F(\psi_1,\cdots,\psi_k)$, 有 $F(\psi_1,\cdots,\psi_k)=0$ 成立. 从而, 由特征方程 (3.446a,b) 可知, ODE (3.443) 的积分因子集 $\Lambda_i, i=1,2,\cdots,k\leqslant n$ 确定了 k 个函数无关的首次积分 $\psi_i, i=1,2,\cdots,k$, 当且仅当对于所有函数 $F(\psi_1,\cdots,\psi_k)\neq\text{const}$, $\sum\limits_{i=1}^{k}F_{\psi_i}\Lambda_i\neq 0$ 成立, 其中, 根据 (3.446a,b) 和 (3.471), 每个 ψ_i 和 Λ_i 是相关的. 对于具有 $\ell<n-1$ 阶积分因子的首次积分来说, 存在一个更强的准则来判定函数无关性.

定理 3.6.4.4　ODE (3.443) 的阶 $0 \leqslant \ell \leqslant n-k$ 的积分因子集确定 k 个函数无关的首次积分 $\Lambda_i, i=1,2,\cdots,k$ 当且仅当积分因子是线性无关的, 即对所有的常数 $c_i \neq 0$, 有 $\psi_i, i=1,2,\cdots,k$,

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \Lambda_i \neq 0 \tag{3.472}$$

成立.

证明　假设

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \Lambda_i = 0 \tag{3.473}$$

成立, 其中 $c_i = \text{const}$. 令 $\widetilde{F} = \sum_{i=1}^{k} c_i \psi_i$, 其中 $\{\psi_i\}$ 是 k 个首次积分的集合, 对应于 k 个积分因子的集合 $\{\Lambda_i\}$. 则由特征方程 (3.446a,b) 和 (3.473) 立即可知

$$\widetilde{F}_{y_{n-1}} = \sum_{i=1}^{k} c_i (\psi_i)_{y_{n-1}} = \sum_{i=1}^{k} c_i \Lambda_i = 0. \tag{3.474}$$

因而, 由 (3.474) 和 (3.445b), 有 $D\widetilde{F} = D\widetilde{F} = \sum_{i=1}^{k} c_i D\psi_i = 0$. 从而 $\widetilde{F} = \text{const} = c$, 使得首次积分集 $\{\psi_i\}$ 满足

$$F(\psi_1, \cdots, \psi_k) = 0, \tag{3.475}$$

其中 $F = \widetilde{F} - c$. 因此, 集合 $\{\psi_i\}$ 是函数相关的.

相反地, 假设 (3.475) 成立, 其中 $\{\psi_i\}$ 是 k 个首次积分的集合, 其对应于 k 个阶 $\ell \leqslant n-k$ 的积分因子的集合 $\{\Lambda_i\}$. 通过取 (3.475) 的 $\partial/\partial y_{n-1}$ 和利用 (3.446b), 得 (3.473) 且 $c_i = F_{\psi_i}$. 现在证明 $c_i = \text{const}$. 因为集合 $\{\psi_i\}$ 是函数相关的, 所以假设至多 $1 \leqslant r < k$ 个首次积分是函数无关的, 且将它们表示为 $\psi_1, \cdots, \psi_r$. 因而, 通过 ODE (3.443) 的阶的约化, 根据 $\psi_1, \cdots, \psi_r$ 和 $x, y, y_1, \cdots, y_{n-r-1}$, 每个表达式 Λ_i 中的变量 $y_{n-1}, \cdots, y_{n-r}$ 能够被消去. 则 $\partial \Lambda_i/\partial \psi_{r+1} = \cdots = \partial \Lambda_i/\partial \psi_k = 0$, 进一步, 因为每个 Λ_i 被假设是 $\ell \leqslant n-k < n-r$ 阶的, 因此可知 $\partial \Lambda_i/\partial y_m = \sum_{j=1}^{r} (\partial \Lambda_i/\partial \psi_j)(\partial \psi_j/\partial y_m) = 0, \quad m = n-r, \cdots, n-1$. 从而, 因为 $\psi_1, \cdots, \psi_r$ 的函数无关性蕴涵着偏导数 $\partial \psi_j/\partial y_m$ 的 $r \times r$ 阶 Jacobi 矩阵是可逆的, 所以得到

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \psi_j} = 0$$

对任意 $i, j = 1, \cdots, k$ 都成立. 现在取 (3.473) 的 $\partial/\partial \psi_j$ 且 $c_i = F_{\psi_i}$, 用偏导数 $\partial c_i/\partial \psi_j = F_{\psi_i \psi_j} = \partial c_j/\partial \psi_i$ 的交换性来求得 $\sum_{i=1}^{k} \Lambda_i (\partial c_j/\partial \psi_i) = 0$. 因此用 $\Lambda_i =$

$\partial\psi_i/\partial y_{n-1}$ 和链式法则可得

$$\frac{\partial c_j}{\partial y_{n-1}} = 0. \tag{3.476}$$

因为 $c_j = F_{\psi_j}$ 也满足 $Dc_j = DF_{\psi_j} = \sum_{i=1}^{k} F_{\psi_j\psi_i} D\psi_i = 0$, 由 (3.476) 和 (3.445b) 可知 $Dc_j = 0$. 因而对于 $j = 1, \cdots, k$, 知 (3.473) 中 $c_j = \text{const}$ 是常数. 这就完成了定理的证明. □

利用比定理 3.6.4.4 中所要求的更少的关于积分因子的阶的约束, 可以给出充分的准则, 从而推广了定理 3.6.2.4 关于首次积分的函数无关性.

定理 3.6.4.5 如果 ODE (3.443) 的任意阶 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 的 $2 \leqslant k \leqslant n$ 个积分因子 $\Lambda_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell), i = 1, 2, \cdots, k$ 是线性无关的, 且满足 $(\Lambda_i/\Lambda_j)_{y_{n-r}} = 0, r = 1, \cdots, k-1, i \leqslant j = 1, 2, \cdots, k$, 那么由 (3.471) 确定的相应的首次积分 $\psi_i, i = 1, 2, \cdots, k$ 是函数无关的.

证明留作习题 3.6.23.

积分因子确定系统 (3.470a,b) 的通解为

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} F_{\psi_i}\Lambda_i, \tag{3.477}$$

其中 $F(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 是 n 个函数无关的首次积分 $\psi_i(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 的任意函数, 且相应的积分因子 $\Lambda_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell), i = 1, 2, \cdots, n$ 源于特征方程 (3.446a,b). 因而, (3.470a,b) 的所有解问题等价于求解最初的 n 阶 ODE (3.443). 然而, 仅仅求得 $1 \leqslant k \leqslant n$ 个解就足够了, 其产生函数无关的首次积分且将 ODE (3.443) 降 k 阶.

对于 $\ell < n-1$ 阶积分因子, 确定系统 (3.470a,b) 分成超定的线性的偏微分方程组, 因而有有限个线性无关的解. 事实上, 考虑假设对于进一步简化和约化该超定系统是有用的. 而且, 为了求得阶 $\ell = n-1$ 的积分因子, 因为分开确定系统 (3.470a,b) 并不是固有的, 所以利用假设是必须的, 使得从 (3.470a,b) 获得超定的系统, 且 (3.470a,b) 具有有限个线性无关的解. 3.5 节中使用了算法程序来求解类似的 $\ell \leqslant n-1$ 阶对称的确定方程, 最重要的是所有上述情况中, 我们也能用同样的算法程序来求解所得到的关于积分因子的确定方程组.

现在总结几个有效的假设以获得积分因子确定系统 (3.470a,b) 的解, 这些假设是 3.6.3 节中三阶和高阶 ODEs 所用假设的推广. 将在 3.6.5 节用例子来说明这些假设的用法.

1. *点形式假设*

如果考虑 ODE(3.443) 的具有点形式的积分因子

$$\Lambda = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y_1, \tag{3.478}$$

那么积分确定系统 (3.470a,b) 变为关于 $\alpha(x,y)$ 和 $\beta(x,y)$ 的含有 $1+[n/2]$ 个线性齐次偏微分方程的系统.

定理 3.6.4.6　n 阶 $(n \geqslant 3)$ODE (3.443) 拥有点形式 (3.478) 的积分因子当且仅当

$$y_n = f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}) = \frac{h_x + \sum_{i=0}^{n-2} y_{i+1}h_{y_i} - y_{n-1}(\alpha_x + y_1(\alpha_y+\beta_x) + (y_1)^2\beta_y + y_2\beta)}{\alpha+\beta y_1}, \quad (3.479)$$

其中 $h(x,y,y_1,\cdots,y_{n-2})$ 是某个函数. 特别地, 如果 $n>3$, $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 关于 y_{n-1} 至多是线性; 如果 $n=3$, $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 关于 y_{n-1} 至多是三次的.

证明　首先考虑恒等式

$$(\alpha+\beta y_1)y_n = D(\alpha y_{n-1} + \beta y_1 y_{n-1}) - y_{n-1}(D\alpha + y_1 D\beta + y_2\beta).$$

则由特征方程 (3.466a) 可知, (3.478) 是 $y_n = f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的积分因子, 当且仅当对于某个函数 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$, 有

$$D(\psi - (\alpha+\beta y_1)y_{n-1}) = -(\alpha+\beta y_1)f - y_{n-1}(D\alpha + y_1 D\beta + y_2\beta).$$

因而, 得到如下关系

$$f = \frac{Dh - y_{n-1}(D\alpha + y_1 D\beta + y_2\beta)}{\alpha+\beta y_1}, \quad (3.480)$$

其中

$$h = (\alpha+\beta y_1)y_{n-1} - \psi. \quad (3.481)$$

如果 $n \geqslant 3$, 则由 (3.480) 的 $\partial/\partial y_n$ 立即可得 $h_{y_{n-1}} = 0$. 因此得 ODE (3.479).

相反地, 如果 $n \geqslant 3$, 对于任意函数 $h(x,y,y_1,\cdots,y_{n-2})$, 由 (3.480) 和 (3.481) 可知, 对于积分因子 (3.478), ODE (3.479) 的特征方程 (3.446a) 成立, 其中 $\psi = (\alpha+\beta y_1)y_{n-1} - h$. □

事实上, 为了确定给定的三阶或高阶 ODE (3.478) 是否拥有点形式的积分因子, 最简单的方式是首先证明满足定理 3.6.4.6 中的必要条件. 然后, 求所得到的积分因子确定系统 (3.470a,b). 另外, 注意, 如果将 (3.479) 匹配成给定的 ODE (3.443), 那么立即可得积分因子 (3.478), 且相应的首次积分为 (3.481).

2. *消元假设*

更一般地, 对于 n 阶 $(n \geqslant 3)$ODE (3.443), 如果考虑 $1 \leqslant \ell < n-1$ 阶的积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 所依赖的变量 y_i 直到某些严格小于 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 中

最高阶导数的阶, 那么积分因子确定系统 (3.470a,b) 又约化为含有 $1+[n/2]$ 个线性齐次偏微分方程的超定系统, 其至多拥有有限个线性无关的解 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$. 存在有效的计算方法求解那样的系统 (Wolf, 2002a,b), 因此, 对于给定的 n 阶 ODE (3.443), 可直接发现所有阶小于 $n-1$ 的积分因子. 但是, 计算的复杂性随 n 的增加而迅速提高.

3. 对称型假设

如果 n 阶 ODE (3.442) 拥有点对称

$$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{3.482}$$

那么因为相应的曲面 (3.443) 在 n 阶延拓生成元

$$X^{(n)}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n}\eta^{(i)}\frac{\partial}{\partial y_i}$$

作用下保持不变, 且 $\eta^{(i)}$ 由 (2.100a,b) 确定, 由此可知 $n-1$ 阶延拓生成元 $X^{(n-1)}$ 将 ODE (3.442) 的首次积分映成首次积分, 因为对于曲面 (3.443) 上每个解曲线来说, ODE (3.442) 的任意首次积分是常量.

定理 3.6.4.7 假设 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 是 ODE (3.443) 的首次积分且积分因子为 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$, 那么在 ODE (3.443) 拥有的任意点对称 (3.482) 作用下, 由

$$\widetilde{\psi}=X^{(n-1)}\psi+\widetilde{c},\quad \widetilde{c}=\text{const}, \tag{3.483}$$

可得首次积分, 且积分因子为

$$\widetilde{\Lambda}=X^{(n-1)}\Lambda+R_{n-1}\Lambda, \tag{3.484}$$

其中

$$R_{n-1}\equiv\frac{\partial\eta^{(n-1)}}{\partial y_{n-1}}=\eta_y-n\xi_y y_1-(n-1)\xi_x. \tag{3.485}$$

证明留作习题 3.6.24.

从而, 由 ODE (3.443) 的每个点对称可得它的积分因子的向量空间上的点对称. $(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1},\Lambda)$ 空间上的显式的生成元为

$$\widetilde{X}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n-1}\eta^{(i)}\frac{\partial}{\partial y_i}+R_{n-1}\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}, \tag{3.486}$$

其将积分因子映成 ODE (3.443) 的积分因子. 因而, 作为一个假设, 可考虑 (3.486) 作用下的积分因子不变量

$$\widetilde{X}\Lambda=r\Lambda,\quad r=\text{const}, \tag{3.487}$$

或等价于

$$\xi\Lambda_x + \eta\Lambda_y + \sum_{i=1}^{n-1}\eta^{(i)}\Lambda_{y_i} + (\eta_y - n\xi_y y_1 - (n-1)\xi_x - r)\Lambda = 0. \tag{3.488}$$

如果现在通过解 $Xu = 0, X^{(1)}v = 0, v_{y_1} \neq 0$ 得到 (3.443) 的不变量 $u(x,y)$ 和 $v(x,y,y_1)$, 且引入微分不变量 $v_i(x,y,y_1,\cdots,y_{i+1}) = \mathrm{d}^i v/\mathrm{d}u^i$, 满足 $X^{(i+1)}v_i = 0$, $i = 1,\cdots,n-2$, 那么得到 (3.448) 的通解如下

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r - R_{n-1}(u,v,y_1)}{\eta^{(1)}(u,v,y_1)}\mathrm{d}y_1\right) w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2}), \tag{3.489}$$

其中 $w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2})$ 是任意函数, 且根据 u 和 v 消去 x 和 y . 另外, 如果 $\xi \neq 0$ 或 $\eta \neq 0$, 那么有

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r - R_{n-1}(x,u,v)}{\xi(x,u)}\mathrm{d}x\right) w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2}), \tag{3.490a}$$

或

$$\Lambda = \exp\left(\int \frac{r - R_{n-1}(y,u,v)}{\eta(y,u)}\mathrm{d}y\right) w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2}), \tag{3.490b}$$

其中 $w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2})$ 是任意函数.

这些假设对应于由

$$X^{(n-1)}\Lambda = s\Lambda, \quad s = \mathrm{const}, \tag{3.491}$$

$$X^{(n-1)}\psi = r\psi + \widetilde{c}, \quad r = \mathrm{const}, \quad \widetilde{c} = \mathrm{const} \tag{3.492}$$

确定的 $X^{(n-1)}$ 作用下 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 和 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的尺度不变性, 当且仅当 $R_{n-1} = r - s = \mathrm{const}$, 其对于下面的点对称成立:

引理 3.6.4.2 n 阶 ODE (3.443) 的点对称 (3.482) 具有形式 $R_{n-1} \equiv \partial\eta^{(n-1)}/\partial y_{n-1} = \mathrm{const} = c$ 当且仅当

$$\eta = \alpha(x) + ((n-1)\beta'(x) + c)y, \quad \xi = \beta(x), \tag{3.493}$$

其中 $\alpha(x), \beta(x)$ 是函数. 特别地, 所有的平移和尺度变换满足 $R_{n-1} = \mathrm{const}$.

证明留作习题 3.6.19.

注意, 给定 ODE (3.443) 的任意平移和尺度变换可自动地由积分因子确定系统 (3.470a,b) 所继承, 所以可考虑简单的假设

$$\Lambda = w(u,v,v_1,\cdots,v_{n-2}), \tag{3.494}$$

即在 (3.489) 中有 $r = R_{n-1}$, 因为 $R_{n-1} = \mathrm{const}$.

3.6.5 三阶和高阶 ODEs 的首次积分举例

考虑三阶 ODE

$$y''' = f(x, y, y', y''), \tag{3.495}$$

其表示为曲面

$$y_3 = f(x, y, y_1, y_2). \tag{3.496}$$

由定理 3.6.4.3 可知, ODE (3.496) 的积分因子 $\Lambda(x, y, y_1, y_2)$ 由如下显式的确定系统

$$2\Lambda_{y_1} + \Lambda_{y_2x} + y_1\Lambda_{y_2y} + y_2\Lambda_{y_2y_1} + (f\Lambda)_{y_2y_2} = 0, \tag{3.497a}$$

$$\begin{aligned}
&3y_2\Lambda_{xy} + 3y_1y_2\Lambda_{yy} + 3(y_2)^2\Lambda_{yy_1} + \Lambda_{xxx} + (y_1)^3\Lambda_{yyy} + (y_2)^3\Lambda_{y_1y_1y_1} + 3y_1\Lambda_{xxy}\\
&+ 3y_2\Lambda_{xxy_1} + 3(y_1)^2\Lambda_{xyy} + 3(y_2)^2\Lambda_{xy_1y_1} + 3(y_1)^2y_2\Lambda_{yyy_1}\\
&+ 3y_1(y_2)^2\Lambda_{yy_1y_1} + 6y_1y_2\Lambda_{xyy_1} + (f\Lambda)_y - (f\Lambda)_{xy_1} - y_1(f\Lambda)_{yy_1} - y_2(f\Lambda)_{y_1y_1}\\
&+ y_2(f\Lambda)_{yy_2} + (f\Lambda)_{xxy_2} + (y_1)^2(f\Lambda)_{yyy_2} + (y_2)^2(f\Lambda)_{y_1y_1y_2} + 2y_1(f\Lambda)_{xyy_2}\\
&+ 2y_2(f\Lambda)_{xy_1y_2} + 2y_1y_2(f\Lambda)_{yy_1y_2} = 0
\end{aligned} \tag{3.497b}$$

确定, 且 ODE (3.496) 的相应的首次积分 $\psi(x, y, y_1, y_2)$ 由显式线积分公式

$$\begin{aligned}
\psi = \int_C &[(-(f\Lambda)_{y_1} + (f\Lambda)_{xy_2} + y_1(f\Lambda)_{yy_2} + y_2(f\Lambda)_{y_1y_2} + y_2\Lambda_y\\
&+ \Lambda_{xx} + (y_1)^2\Lambda_{yy} + (y_2)^2\Lambda_{y_1y_1} + 2y_1\Lambda_{xy} + 2y_2\Lambda_{xy_1} + 2y_1y_2\Lambda_{yy_1})(\mathrm{d}y - y_1\mathrm{d}x)\\
&- ((f\Lambda)_{y_2} + \Lambda_x + y_1\Lambda_y + y_2\Lambda_{y_1})(\mathrm{d}y_1 - y_2\mathrm{d}x) + \Lambda(\mathrm{d}y_2 - f\mathrm{d}x)]
\end{aligned} \tag{3.498}$$

给定.

现在, 通过 3.6.4 节所总结的算法, 我们说明如何求积分确定系统 (3.497a,b) 的解. 同时说明通过线积分公式 (3.498) 计算相应的首次积分, 且通过三阶 ODEs 的首次积分来说明阶的约化.

作为第一个例子, 考虑 ODE

$$y_3 = -yy_1, \tag{3.499}$$

其源于寻找 KdV 方程的行波解 (习题 4.1.2). ODE (3.499) 拥有的点对称由平移对称 $x \to x + \varepsilon, y \to y$ 和尺度对称 $x \to \lambda x, y \to \lambda^{-2}y$ 构成. 首先, 因为 ODE (3.499) 并不包含 y_2, 它满足定理 3.6.4.6 的必要条件使得拥有点形式的积分因子

$$\Lambda = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y_1. \tag{3.500}$$

将 (3.500) 代入积分确定系统 (3.497a,b) 得到

$$\beta = 0. \tag{3.501}$$

利用 (3.501) 得

$$3\alpha_{xy}y_2 + 3\alpha_{yy}y_1y_2 + \alpha_{yyy}(y_1)^3 + 3\alpha_{xyy}(y_1)^2 + 3\alpha_{xxy}y_1 + \alpha_{xxx} - y\alpha_x = 0. \tag{3.502}$$

由关于 y_1 和 y_2 的 (3.502) 的分离可得 $\alpha_{xy} = \alpha_{yy} = 0$ 和 $y\alpha_x = \alpha_{xxx}$, 即得

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 y, \quad \alpha_0 = \text{const}, \quad \alpha_1 = \text{const}.$$

因而, ODE (3.499) 拥有两个点形式的积分因子

$$\Lambda_1 = 1, \quad \Lambda_2 = y. \tag{3.503}$$

利用线积分公式 (3.498) 且选择 C 是平行于坐标轴的从 $(0,0,0,0)$ 到 (x,y,y_1,y_2) 的分段直线, 得相应的首次积分

$$\psi_1 = \int_C [y\mathrm{d}y + \mathrm{d}y_2] = \frac{1}{2}y^2 + y_2 \tag{3.504a}$$

和

$$\psi_2 = \int_C [(y^2 + y_2)\mathrm{d}y - y_1\mathrm{d}y_1 + y\mathrm{d}y_2] = \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}(y_1)^2 + yy_2. \tag{3.504b}$$

由定理 3.6.4.4 可知, 首次积分 (3.504a,b) 是函数无关的. 因而有两个求积分 $\psi_1 = \text{const} = c_1, \psi_2 = \text{const} = c_2$, 其将三阶 ODE (3.499) 约化为一阶 ODE

$$y_1 = \pm\sqrt{2c_1 y - \frac{1}{3}y^3 - 2c_2}.$$

这个约化的 ODE 是可分离的, 其源于 ODE (3.499) 所拥有的平移对称 $x \to x + \varepsilon, y \to y$ (但不是在所拥有的尺度对称) 作用下积分因子 (3.503) 的不变性. 因此可得额外的首次积分 (参看 (3.441))

$$\psi_3 = \pm\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2c_1 y - \frac{1}{3}y^3 - 2c_2}} - x, \tag{3.505}$$

其显然与 ψ_1 和 ψ_2 是函数无关的. 因而, $\psi_3 = \text{const} = c_3$ 产生 ODE (3.499) 的完全积分 (即通解).

作为第二个例子, 考虑三阶 ODE

$$y''' = 6x\frac{(y'')^3}{(y')^2} + 6\frac{(y'')^2}{y'}, \tag{3.506}$$

或等价于曲面

$$y_3 - 6x(y_2)^3(y_1)^{-2} - 6(y_2)^2(y_1)^{-1} = 0, \tag{3.507}$$

其拥有接触对称, 这已在 3.5.2 节中证明过. 首先, 观察知道 (3.507) 关于 y_2 是三次的, 因而由定理 3.6.4.6 知, 它并不拥有点形式的任意积分因子 $\Lambda = \alpha(x,y) + \beta(x,y)y_1$. 从而, 我们代替地用对称型的假设 (3.409a,b) 来求积分因子. 由 3.5.2 节 (参看习题 3.5.5) 可知, (3.507) 的点对称由关于 y 的平移、关于 x 的尺度以及关于 y 的尺度构成. 对于 y 的平移对称 ($\eta = 1$, $\xi = 0$), 根据不变量 x, y_1, y_2, 假设 (3.490b) 产生 $\Lambda = \mathrm{e}^{ry}w(x, y_1, y_2)$. 对于 y 的平移对称 ($\eta = y, \xi = 0$), 根据不变量 $x, y_1/y, y_2/y$, 假设 (3.490b) 产生 $y^{r-1}w(x, y_1/y, y_2/y)$. 类似地, x 尺度对称 ($\eta = 0, \xi = x$) 使得 $\Lambda = x^{r+2}w(y, xy_1, x^2y_2)$. 因而, 关于 $\Lambda(x, y, y_1, y_2)$ 的共同联合的不变量为

$$\Lambda = x^r(y_1)^s w(u), \quad u = \frac{xy_2}{y_1}, \quad r = \text{const}, \quad s = \text{const}. \tag{3.508}$$

将 (3.508) 代入积分确定系统 (3.497a,b) 可得方程

$$u(2u+1)(3u+1)w'' + (36u^2 + (21+s)u + r + 1)w' + (36u + 12 + 2s)w = 0, \tag{3.509a}$$

$$\begin{aligned}
&(2u+1)(3u+1)u^3(u-1)^2w''' - 3u^2(u-1)((-20+4s)u^3\\
&+(2+4r+3s)u^2 + (6+3r+s)u + r)w'' + 3u(2(s-3)(s-8)u^4\\
&+(-46+7s+s^2-22r+4rs)u^3 + (-2+6r+7s+s^2+2rs)u^2\\
&+r(9+r+2s)u + r(r-1))w' - (-12(s-3)(s-2)u^4\\
&-(s-2)(24+30r+5s+s^2)u^3 - 3r(6r+5s+s^2)u^2\\
&-3r(r-1)(4+s)u - r(r-1)(r-2))w = 0.
\end{aligned} \tag{3.509b}$$

取 (3.509b) 的 d/du, 用 (3.509b) 消去 w''', 然后用 (3.509a) 消去 w'', 可得 $Aw' + B = 0$, 其中

$$A = ((s+1)u + r - 1)(su + r - 2),$$

$$B = \frac{(su+r-2)(12(1+s)u^3 + (18(r-1) + (1+s)(6+s))u^2 + 2(r-1)(s+6)u + r(r-1))}{u(2u+1)(3u+1)}.$$

因而, 如果 $(s, r) \neq (0, 2)$ 或者 $(-1, 1)$, 使得 $(A, B) \not\equiv (0, 0)$, 那么可得可分离的一阶 ODE

$$\frac{w'}{w} = -\frac{12(1+s)u^3 + (18(r-1) + (1+s)(6+s))u^2 + 2(r-1)(s+6)u + r(r-1)}{u(2u+1)(3u+1)((s+1)u + r - 1)}. \tag{3.510}$$

它具有如下解

$$w = (3u+1)^p(2u+1)^q((s+1)u+r-1)u^{-r}, \quad p = 3r-s-5, \quad q = -2r+s+2, \quad (3.511)$$

且在情况 $(s,r) = (0,2), (-1,1)$ 下的确满足方程 (3.509a,b). 因此, 我们得到积分因子族

$$\Lambda = (y_1)^{s+r}(y_2)^{-r}\left(\frac{3xy_2}{y_1}+1\right)^{3r-s-5}\left(\frac{2xy_2}{y_1}+1\right)^{s-2r+2}\left((s+1)\frac{xy_2}{y_1}+r-1\right), \quad (3.512)$$

且依赖两个自由参数 (r,s). 至此, 期望 (3.512) 可以产生至多两个函数无关的首次积分.

为了获得简单的表达式, (3.512) 中选择 $r=2$, $s=$1, 2, 得到两个积分因子

$$\Lambda_1 = \frac{(y_1)^3}{(y_2)^2}, \quad \Lambda_2 = \frac{(y_1)^4}{(y_2)^2}. \quad (3.513)$$

因为 $\Lambda_1/\Lambda_2 = (y_1)^{-1} \neq \text{const}$ 不包含 y_2, 由定理 3.6.4.5 可知, 由 Λ_1 和 Λ_2 得到由线积分公式 (3.498) 给出的函数无关的首次积分 ψ_1 和 ψ_2. 因而, 得到首次积分

$$\psi_1 = \int_C \left[(-3(y_1)^2)\mathrm{d}x - \left(6xy_1 + \frac{3(y_1)^2}{(y_2)^2}\right)\mathrm{d}y_1 + \frac{(y_1)^3}{(y_2)^2}\mathrm{d}y_2\right] = -3x(y_1)^2 - \frac{(y_1)^3}{y_2} \quad (3.514a)$$

和

$$\psi_2 = \int_C \left[(-2(y_1)^3)\mathrm{d}x - \left(6x(y_1)^2 + \frac{4(y_1)^3}{y_2}\right)\mathrm{d}y_1 + \frac{(y_1)^4}{(y_2)^2}\mathrm{d}y_2\right] = -2x(y_1)^3 - \frac{(y_1)^4}{y_2}, \quad (3.514b)$$

其中 C 是平行于坐标轴从 $(0,0,0,\widetilde{y}_2)$ 到 (x,y,y_1,y_2) 的分段直线, 且 $\widetilde{y}_2 \neq 0$. 注意, 直接可证明积分因子族 (3.502) 约化为

$$\Lambda = (-\psi_1)^{p+1}(-\psi_2)^q(q+1)\Lambda_2 + (-\psi_1)^p(-\psi_2)^{q+1}(p+1)\Lambda_1 = F_{\psi_1}\Lambda_1 + F_{\psi_2}\Lambda_2,$$

$$F = (-1)^{1+p+q}(\psi_1)^{p+1}(\psi_2)^{q+1}, \quad p = 3r-s-5, \quad q = s-2r+2,$$

因此, 相应的首次积分族是 (3.514a,b) 的函数组合.

现在, 通过考虑特殊情况 $(s,r) = (0,2)$ 下的 (3.509a,b), 可得第三个函数无关的首次积分. 因为由 (3.511) 且 $s=0, r=2$ 可得 (3.509a,b) 的如下解

$$w = \frac{u+1}{u^2}(3u+1)(2u+1)^{-2},$$

在这种情况下, 可以用阶的约化寻找 (3.509a,b) 的通解. 于是得到第二个解

$$w = u^{-2},$$

得积分因子

$$\Lambda_3 = \frac{(y_1)^2}{(y_2)^2}. \tag{3.515}$$

注意, Λ_3 与 Λ_1 和 Λ_2 是线性无关的. 由线积分公式 (3.498) 且轨线 C 与前面使用的一样, 可得到相应的首次积分

$$\psi_3 = \int_C \left[(-6y_1)\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y - \left(6x + \frac{2y_1}{y_2}\right)\mathrm{d}y_1 + \frac{(y_1)^2}{(y_2)^2}\mathrm{d}y_2\right] = 2y - 6xy_1 - \frac{(y_1)^2}{y_2}, \tag{3.516}$$

其与 (3.514a,b) 是线性无关的, 因为 $(\psi_1)_y = (\psi_2)_y = 0$ 但 $(\psi_3)_y \neq 0$.

由首次积分 (3.514a,b) 和 (3.516) 得到三个求积分 $\psi_1 = \text{const} = c_1$, $\psi_2 = \text{const} = c_2, \psi_3 = \text{const} = c_3$, 通过消去 y_2 和 y_1, 这些将 (3.507) 完全约化为代数方程. 显式地, 从 (3.514a) 中解出 y_2, 并将它代入 (3.514b) 和 (3.516), 得

$$x(y_1)^3 + c_1y_1 - c_2 = 0,$$

$$3x(y_1)^2 + (c_3 - 2y)y_1 - c_1 = 0.$$

从这些方程中消去 y_1, 可得

$$\begin{aligned}&3x(c_1(c_3-2y) - 9xc_2)^2 - c_1((c_3-2y)^2 + 12xc_1)^2 \\ &+ (c_3-2y)(c_1(c_3-2y) - 9xc_2)((c_3-2y)^2 + 12xc_1) = 0,\end{aligned} \tag{3.517}$$

其为 ODE (3.507) 的通解.

最后, 考虑一个四阶 ODE

$$y^{(4)} = f(x, y, y', y'', y'''), \tag{3.518}$$

其表示为如下的曲面

$$y_4 - f(x, y, y_1, y_2, y_3) = 0. \tag{3.519}$$

由 (3.470a,b) 可知, ODE (3.519) 的积分因子 $\Lambda(x, y, y_1, y_2, y_3)$ 的确定系统为

$$2\Lambda_{y_2} + D_3\Lambda_{y_3} + (f\Lambda)_{y_3y_3} = 0, \tag{3.520a}$$

$$2\Lambda_y + 3D_3\Lambda y_1 + (D_3)^2\Lambda_{y_2} + D_3(f\Lambda)_{y_2y_3} + 2(f\Lambda)_{y_1y_3} - (f\Lambda)_{y_2y_2} = 0, \tag{3.520b}$$

$$(f\Lambda)_y - D_3(f\Lambda)_{y_1} + (D_3)^2(f\Lambda)_{y_2} - (D_3)^3(f\Lambda)_{y_3} - (D_3)^4\Lambda = 0, \tag{3.520c}$$

且 $D_3 = \dfrac{\partial}{\partial x} + y_1\dfrac{\partial}{\partial y} + y_2\dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_3\dfrac{\partial}{\partial y_2}$. 相应首次积分的线积分公式为

$$\psi = \int_C [(-(f\Lambda)_{y_1} + D_3(f\Lambda)_{y_2} - (D_3)^2(f\Lambda)_{y_3} - (D_3)^3\Lambda)(\mathrm{d}y - y_1\mathrm{d}x)$$

$$+(-(f\Lambda)_{y_2}+D_3(f\Lambda)_{y_3}+(D_3)^2\Lambda)(\mathrm{d}y_1-y_2\mathrm{d}x)$$
$$+(-(f\Lambda)_{y_3}-D_3\Lambda)(\mathrm{d}y_2-y_3\mathrm{d}x)+\Lambda(\mathrm{d}y_3-f\mathrm{d}x)]. \tag{3.521}$$

通过 3.6.4 节中所提到的代数方法, 现在给出一个例子来说明如何解积分因子确定系统 (3.520a~c), 并且由 (3.521) 计算首次积分如何使得阶的约化.

考虑四阶 ODE

$$(yy'(y/y')'')'=0,$$

其源于研究具有波速 $y(x)$ 的波动方程. 该 ODE 等价于 (x,y,y_1,y_2,y_3,y_4) 空间上的曲面

$$y_4=-\frac{(y_1)^2y_2}{y^2}+\frac{4(y_2)^2}{y}-\frac{4(y_2)^3}{(y_1)^2}-\frac{3y_1y_3}{y}+\frac{5y_2y_3}{y_1}. \tag{3.522}$$

现在, 求 ODE (3.522) 的所有积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,y_2)$ 直到二阶. 由积分因子确定系统 (3.520a~c) 可知, 由第一个方程 (3.520a) 可得 $\Lambda_{y_2}=0$, 因此 Λ 至多是一阶积分因子. 那么, 第二个方程 (3.520b) 关于 y_2 是线性的. 由 y_2 的系数得

$$3\Lambda+5y_1\Lambda_{y_1}+(y_1)^2\Lambda_{y_1y_1}=0,$$

其是 Euler 方程 (参看 3.6.3 节) 且通解为 $\Lambda=\alpha(x,y)(y_1)^{-1}+\beta(x,y)(y_1)^{-3}$. (3.520b) 中的剩余项关于 y_1 的幂级数分成

$$y\beta_y-2\beta=0,\quad y\alpha_y-2\alpha=0,\quad \beta_x=\alpha_x=0.$$

因而有

$$\alpha=\alpha_0y^2,\quad \beta=\beta_0y^2,\quad \alpha_0=\text{const},\quad \beta_0=\text{const}.$$

接着可得 $\Lambda=\alpha_0y^2(y_1)^{-1}+\beta_0y^2(y_1)^{-3}$ 满足第三个方程 (3.520c)①. 从而, 得到两个积分因子

$$\Lambda_1=y^2(y_1)^{-1},\quad \Lambda_2=y^2(y_1)^{-3}. \tag{3.523}$$

因为这些是一阶积分因子, 由定理 3.6.4.4 可知, 相应的首次积分是函数无关的. 线积分公式为

$$\psi_1=\int_C\left[\left(y_2+\frac{2yy_3}{y_1}-\frac{4y(y_2)^2}{(y_1)^2}\right)\mathrm{d}y+\left(\frac{4y^2(y_2)^2}{(y_1)^3}-\frac{y_3y^2}{(y_1)^2}\right)\mathrm{d}y_1\right.$$
$$\left.+\left(y-\frac{4y_2y^2}{(y_1)^2}\right)\mathrm{d}y_2+\frac{y^2}{y_1}\mathrm{d}y_3\right]=yy_2-\frac{2y^2(y_2)^2}{(y_1)^2}+\frac{y^2y_3}{y_1} \tag{3.524a}$$

和

$$\psi_2=\int_C\left[\left(\frac{y_2}{(y_1)^2}+\frac{2yy_3}{(y_1)^3}-\frac{2y(y_2)^2}{(y_1)^4}\right)\mathrm{d}y+\left(-\frac{2yy_2}{(y_1)^3}+\frac{4y^2(y_2)^2}{(y_1)^5}-\frac{3y^2y_3}{(y_1)^4}\right)\mathrm{d}y_1\right.$$

① 原著为 $\Lambda=\alpha_0y^2(y_1)^{-1}+\beta_0y^2(y_1)^3$.

$$+\left(\frac{y}{(y_1)^2}-\frac{2y_2y^2}{(y_1)^4}\right)\mathrm{d}y_2+\frac{y^2}{(y_1)^3}\mathrm{d}y_3\Bigg]$$

$$=\frac{yy_2}{(y_1)^2}-\frac{y^2(y_2)^2}{(y_1)^4}+\frac{y^2y_3}{(y_1)^3}, \tag{3.524b}$$

其中 C 是平行于坐标轴的由 $(0,0,\widetilde{y}_1,0,0)$ 到 (x,y,y_1,y_2,y_3) 的分段直线, 且 $\widetilde{y}_1\neq 0$. 由首次积分 (3.524a,b) 得到的两个求积分 $\psi_1=\mathrm{const}=c_1,\psi_2=\mathrm{const}=c_2$ 将四阶 ODE (3.522) 约化为二阶 ODE

$$y_2=\pm\frac{y_1}{y}\sqrt{c_2(y_1)^2-c_1}. \tag{3.525}$$

ODE (3.525) 是可分离的 (参看 (3.439)), 因此立即可知它拥有两个求积分, 且可得 ODE (3.522) 的通解

$$\int\frac{1}{\cosh((c_2)^{1/2}(\log y+c_3))}\mathrm{d}y=\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}x+c_4. \tag{3.526}$$

习 题 3.6

1. 考虑一般的二阶线性 ODE

$$y''+p(x)y'+q(x)y=g(x).$$

(a) 当 $g(x)\equiv 0$ 和 $g(x)\neq 0$ 时, 求积分因子 $\Lambda(x,y)$ 以及相应的首次积分.

(b) 对于情况 $p(x)=\mathrm{const},\ q(x)=\mathrm{const}$, 求点形式积分因子 $\Lambda=\alpha(x,y)+\beta(x,y)y_1$ 和相应的首次积分.

2. 考虑非线性 van der Pol 振荡

$$y''-c(1-ay^2)y'+by^p=0,\quad a,b,c,p=\mathrm{const}. \tag{3.527}$$

求点形式的积分因子 $\Lambda=\alpha(x,y)+\beta(x,y)y_1$ 以及相应的首次积分. 证明: 可以得到两个函数无关的首次积分当且仅当 $p=3$ 且 $ac=-3b$, 另外, 在这种情况下给出 (3.527) 的完全积分.

3. 考虑满非线性 Duffing 方程

$$y''+ay^3=0,\quad a=\mathrm{const}. \tag{3.528}$$

(a) 证明: (3.528) 所拥有的唯一的点形式的积分因子为 $\Lambda=y_1$.

(b) 证明: 由对应于 $\Lambda=y_1$ 的首次积分 ψ 给定的约化的一阶 ODE: $\psi=\mathrm{const}=c$ 是可分离的. 进而求得 (3.528) 的完全求积分.

(c) 求对应于该可分离的约化 ODE 的求积分的 (3.528) 的积分因子.

(d) 用 (3.528) 的平移对称 $x \to x+\varepsilon, y \to y$ 和尺度对称 $x \to \lambda x, y \to \lambda^{2/(1-p)}y$ 的结合的不变量, 考虑 (3.528) 的积分因子假设 (3.400b,c). 证明该假设产生 (3.528) 的一阶不是点形式的积分因子, 并且给出首次积分, 其与源于积分因子 $\Lambda = y_1$ 的首次积分是函数无关的.

4. 考虑变量频率振荡 (Mimura, Nôno, 1994)

$$y'' + (y')^2 y = 0. \tag{3.529}$$

(a) 求 (3.529) 的点形式的积分因子 $\Lambda = \alpha(x,y) + \beta(x,y)y_1$, 以及相应的首次积分.

(b) 用 (3.529) 的平移对称 $x \to \lambda x, y \to y$ 和尺度对称 $x \to x+\varepsilon, y \to y$ 的结合的不变量, 求 (3.529) 的由假设 (3.400b,c) 给定的积分因子和相应的首次积分.

(c) 求 (3.529) 的完全求积分.

5. Thomas-Fermi 方程为

$$y'' = x^{-1/2}y^{3/2}. \tag{3.530}$$

(a) 证明: ODE(3.530) 拥有非点形式的积分因子.

(b) 在 (3.530) 拥有的尺度对称 $x \to \lambda x, y \to \lambda^{-3}y$ 作用下, 求 ODE(3.530) 的由假设 (3.400b,c) 确定的一阶积分因子.

6. 求三阶 ODE$y'''=0$ 的所有一阶积分因子 $\Lambda(x,y,y_1)$ 以及相应的首次积分. 通过用该 ODE 的通解, 求所有二阶积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,y_2)$ 以及相应的首次积分.

7. 考虑 Blasius 方程

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0. \tag{3.531}$$

(a) 证明: 三阶 ODE(3.531) 并不拥有一阶积分因子.

(b) 用平移对称 $x \to x+\varepsilon, y \to y$ 和尺度对称 $x \to \lambda x, y \to \lambda^{-1}y$ 的结合的不变量, 求 (3.531) 的由假设 (3.490a,b) 确定的二阶积分因子. 证明: ODE(3.531) 并不拥有形式的积分因子 $\Lambda = y^r y_1^s \alpha(u), u = y_2/y^3, r, s = \text{const}$.

8. 考虑 KdV 的行波 ODE(3.499).

(a) 由 ODE (3.499) 拥有的两个点形式的积分因子可得约化的一阶 ODE. 求对应于该约化 ODE 的求积分的 (3.499) 的积分因子.

(b) 求 ODE(3.499) 的一阶积分因子.

(c) 用尺度对称不变量 $u = y_2/y^2$, 求由假设 $\Lambda = y^r y_1^s \alpha(u), r, s = \text{const}$ 给定的 (3.499) 的二阶积分因子.

9. 考虑四阶 ODE

$$y^{(4)} = \frac{4}{3}(y''')^2/y''. \tag{3.532}$$

(a) 求 ODE (3.532) 的点形式的积分因子.

(b) 求 ODE(3.532) 的一阶和二阶积分因子.

(c) 用 (3.532) 的 x 和 y 的平移对称以及 x 和 y 的尺度对称的结合的不变量, 考虑 (3.532) 的由假设 (3.490a,b) 给定的积分因子.

10. 对拥有形式 $\Lambda = \mu(x, y)$ 的积分因子的所有二阶 ODEs: $y'' = f(x, y, y')$ 进行分类.

11. 对拥有如下形式

(a) $\Lambda = 1/y_1$;

(b) $\Lambda = (y_1)^2$;

(c) $\Lambda = \mathrm{e}^{y_1}$

的积分因子的所有二阶 ODEs: $y'' = f(x, y, y')$ 进行分类.

12. 关于函数 $f(x, y, y_1)$, 求使得二阶 ODE$y'' = f(x, y, y')$ 拥有如下形式

(a) $\Lambda = \mu(x, y_1)$;

(b) $\Lambda = \mu(y, y_1)$

的积分因子的充要条件.

13. 对拥有形式 $\Lambda = \mu(x, y, y_1)$ 的积分因子的所有三阶和更高阶的 ODEs 进行分类.

14. 考虑 (x, y, y_1) 空间上的截断 Euler 算子 $E_1 = \dfrac{\partial}{\partial y} - D\dfrac{\partial}{\partial y_1}$, 其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y}.$$

(a) 证明: 通过下面的步骤, (x, y, y_1) 空间上的方程

$$E_1(\theta(x, y, y_1)) = 0 \tag{3.533a}$$

可以显式地求得

$$\theta(x, y, y_1) = D\psi(x, y),$$
$$\psi(x, y) = \int_0^1 x\theta(\lambda x, 0, 0) + y\theta_{y_1}(x, \lambda y, \lambda y_1)\mathrm{d}\lambda. \tag{3.533b}$$

求解步骤为: (3.533a) 中, 分别用 $\Upsilon(\lambda) = \lambda y$ 和 $\Upsilon_1(\lambda) = D\Upsilon(\lambda) = \lambda y_1$ 代替 y 和 y_1, 然后乘以 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}\lambda = y$, 可得

$$0 = y\left(\frac{\partial}{\partial Y}\theta(x, \Upsilon, \Upsilon_1) - D\frac{\partial}{\partial Y_1}\theta(x, \Upsilon, \Upsilon_1)\right)$$

$$= -D\left(-y\frac{\partial}{\partial Y_1}\theta(x,\Upsilon,\Upsilon_1)\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda}\theta(x,\Upsilon,\Upsilon_1). \tag{3.534}$$

最后, 从 $\lambda=0$ 到 $\lambda=1$ 对 (3.534) 进行积分, 并且用恒等式 $\theta(x,0,0)=\int_0^1 x\theta(\lambda x,0,0)\mathrm{d}\lambda$, 即可得到 (3.533b).

(b) 证明: 对于一条适当的轨线 C, 在相差一个常数范围内, 线积分公式 (3.336) 可约化为 (3.533b).

15. 对于一般的一阶 ODE: $y'=f(x,y)$, 求积分因子方程 $\mathrm{d}x/1=\mathrm{d}y/f=\mathrm{d}\Lambda/(-f_y\Lambda)$ 可得到通解 $\Lambda=F'(\psi_1)\Lambda_1$, 其中 $\Lambda_1=(\psi_1)_y$ 是 (3.335) 的任意特解, F 是 ψ_1 的一个任意函数.

16. 证明: (x,y,y_1,y_2) 空间上的截断 Euler 算子 $E_2=\frac{\partial}{\partial y}-D\frac{\partial}{\partial y_1}+D^2\frac{\partial}{\partial y_2}$, 其中 $D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}$ 能够类似地转化为 (3.533a,b). 对于适当的轨线 C, 线积分公式 (3.366) 可约化为该转化.

17. 证明: 恒等式

$$[D,X^{(n)}]=(D\xi)D+(D\eta^{(n)})\frac{\partial}{\partial y_n},$$

其中 $X^{(n)}$ 是算子$X=\xi(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+\eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$ 的 n 阶延拓 (2.99f), $\eta^{(n)}$ 是 η 的 n 阶延拓 (2.100f), D 是 $(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 空间上的全导数算子 (3.445a).

18. 陈述并证明定理 3.6.3.1 的逆定理.

19. 证明引理 3.6.3.2 和引理 3.6.4.2.

20. 证明定理 3.6.3.4 和推论 3.6.3.1.

21. 证明: Ψ_{n-k} 等于 $\Psi_{n-k}|_{y_n=0}$ 加上关于 y_n 的 k 次多项式, 且其系数由 $\partial\Psi_{n-i}/\partial y_n, 0\leqslant i\leqslant k, k=1,2,\cdots,n$ 的微分先行组合给定.

22. 证明: 由方程组 $\Psi_{j,j+1}|_{y_n=0}=0, j=[(n+1)/2],\cdots,n-1$, 和 $\Psi_0|_{y_n=0}=0$ 可显式地求得 (3.462b,c).

23. 证明定理 3.6.4.5.

24. 证明定理 3.6.4.7.

3.7 积分因子与对称之间的基本联系

3.5 节和 3.6 节中分别推导了二阶和高阶 ODEs 的积分因子和对称的确定系统, 现在我们讨论它们之间的重要联系.

对于具有变分原理的 ODE, 通过古典的 Noether 定理 (Noether, 1918; Boyer, 1967; Oliver ,1986), 可以证明所有的首次积分源于单参数局部变换群作用下作用

泛函的不变性. 特别地, Noether 定理表明, 单参数局部变换群使得给定的作用保持不变当且仅当具有特征形式的变换的无穷小为给定 ODE 的积分因子. 显然, 因为每个那样的单参数局部变换群使得给定的作用泛函的极值曲线保持不变, 所以可得 ODE 的相应的对称. 然而, ODE 的所有对称并不一定源于作用泛函的局部变换群. 例如, 作用泛函通常在相应 ODE 拥有的尺度变换作用下不是不变的. 如果 ODE 的对称相应于它的作用泛函的单参数局部变换群, 那么称它为变分对称. 从而由 Noether 定理可知, 当 ODE 拥有变分原理时, 积分因子和变分对称是同样的.

ODE 的变分原理的存在性能够表示关于线性算子的条件, 该算子是 ODE 的线性化 (即 Fréchet 导数). 特别地, ODE 拥有变分原理当且仅当它的线性化算子是自伴随的 (而且, 通过显式的公式, 作用泛函可由 ODE 的自变量和因变量构造).

无论 ODE 是否拥有变分原理, ODE 的线性化算子与它的对称确定方程有直接的联系. 由定理 3.5.1.1 知, 对称特征是 ODE 的线性化的解, 且 ODE 的线性化在它的整个解空间上都成立. 因此, 如果 ODE 的线性化是自伴随的, 那么它的积分因子与变分对称是同样的, 因而, 在这种情形下, 积分因子的确定系统等价于对称是变分条件下的对称确定方程. 如果 ODE 的线性化不是自伴随的, 那么积分因子不再是对称的, 但是, 它们与 ODE 的伴随线性化的解有直接的关系. 正如所熟悉的二阶线性 ODEs 的古典情况一样 (参看 3.6.3 节).

无论 n 阶 ODE 的线性化算子是否自伴随的, 根据定理 3.6.4.3 可知, 含 $1+[n/2]$ 个方程的积分因子确定系统等价于含 $[n/2]$ 个额外方程的对称确定方程的伴随方程. 这些额外确定方程称为伴随不变性条件, 然而, 对称确定方程的伴随方程的解称为伴随对称. 因而, n 阶 ODE 的积分因子是那些满足伴随不变性条件的伴随对称.

当 n 阶 ODE 拥有变分原理时, 对称确定方程与它的伴随方程是一样的, 所以这里伴随对称是对称. 因此, 伴随不变性条件等价于对称是变分的条件. 我们显式地确定变分对称条件是 $[n/2]$ 个确定方程, 它是将积分因子确定系统分裂成对称确定方程和 $[n/2]$ 个额外的确定方程而得到的.

最后, 比较积分因子、对称以及伴随对称的计算结果. 特别地, 我们说明了拥有给定形式的积分因子的这类 n 阶 ODE 具有一个基数, 这类似于拥有同样形式对称的一类 n 阶 ODEs.

3.7.1 伴随对称

考虑 n 阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{3.535}$$

可表示为如下曲面

$$F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=y_n-f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})=0. \tag{3.536}$$

ODE (3.536) 的线性化算子为

$$L_F=D^n-\sum_{i=0}^{n-1}f_{y_i}D^i, \tag{3.537}$$

其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial}{\partial y_{i-1}},\quad 其中\ y_0=y.$$

伴随线性化算子 (用形式的分部积分) 为

$$L_F^*=(-1)^nD^n-\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^i\frac{i!}{(i-j)!j!}(D^{i-j}f_{y_i})D^j. \tag{3.538}$$

也可以用下面的关系来引入算子 (3.538):

引理 3.7.1.1　算子 L_F 和 L_F^* 满足恒等式

$$WL_FV-VL_F^*W=DS[W,V;F], \tag{3.539a}$$

其中 S 是三线性函数, 定义为

$$S[W,V;U]=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(D^{i-j}V)D^j(WU_{y_{i+1}}), \tag{3.539b}$$

且 $U(x,y,y_1,\cdots,y_n),V(x,y,y_1,\cdots,y_n),W(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 是任意函数.

证明　通过利用关于 L_F 和 L_F^* 定义 (3.537) 和 (3.538), 直接比较 (3.539a) 的两侧可验证恒等式 (3.539a) 是正确的. □

定义 3.7.1.1　n 阶 ODE (3.535) 是自伴随的, 当且仅当 $L_F=L_F^*$. 特别地, 自伴随等价于 n 个条件

$$(-1)^n=1,\quad 即\ n\ 为偶数, \tag{3.540a}$$

$$f_{y_i}=\sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^{i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!}D^jf_{y_{i+j}},\quad i=0,1,\cdots,n-1. \tag{3.540b}$$

令

$$L_F=L_F|_{F=0}=D^n-\sum_{i=0}^{n-1}f_{y_i}D^i, \tag{3.541a}$$

$$L_F^* = L_F^*|_{F=0} = (-1)D^n - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^i \frac{i!}{(i-j)!j!}(D^{i-j}f_{y_i})D^j, \tag{3.541b}$$

其中

$$D = D|_{F=0} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \frac{\partial}{\partial y_{i-1}} + f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}.$$

算子 (3.541a,b) 将算子 (3.537) 和 (3.538) 限制在曲面 (3.536) 上. 由定理 3.5.1.1 可知, ODE (3.535) 的 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶特征形式的对称是对称确定方程

$$L_F \hat{\eta} = D^n \hat{\eta} - \sum_{i=0}^{n-1} f_{y_i} D^i \hat{\eta} = 0 \tag{3.542}$$

的解 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$.

定义 3.7.1.2 ODE (3.535) 的 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶自伴随对称是自伴随对称确定方程

$$L_F^* \omega = (-1)^n D^n \omega - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i D^i (f_{y_i}\omega) = 0 \tag{3.543}$$

的解 $\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$.

几何学上, ODE (3.535) 的对称描述了曲面 (3.536) 上的运动 (参看 3.5.1 节). 若 ODE (3.535) 是自伴随的, 则它的伴随对称与它的特征形式的对称是同样的. 然而, 若 ODE (3.535) 不是自伴随的, 则一般地, 它的伴随对称不再是对称的 (即确定方程 (3.542) 和 (3.543) 的共同的解仅 $\hat{\eta} = \omega = 0$), 关于伴随对称确定方程 (3.543) 的解, 并没有明显的几何不变性或运动.

注意, 根据 L_F 和 L_F^* , ODE (3.535) 的自伴随性条件可以公式化.

引理 3.7.1.2 n 阶 ODE (3.535) 是自伴随的当且仅当 $f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 满足 $L_F = L_F^*$, 其等价于 $n+1$ 个条件

$$(-1)^n = 1,$$

$$f_{y_j} = \sum_{i=0}^{n-j-1}(-1)^{i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!} D^i f_{y_{i+j}}, \quad j = 0,1,\cdots,n-1.$$

特别地, $f_{y_{n-1}} = 0$ 是必然的 (但除 $n=2$ 外并不是充分的).

证明留作习题 3.7.5.

类似的讨论应用于 n 阶 ODE

$$F(x,y,y_1,\cdots,y_n) = 0, \quad F_{y_n} \neq 0, \tag{3.544}$$

其并不是关于 y_n 的可解形式 (3.536). ODE (3.544) 的特征形式的对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是确定方程 $L_F\hat{\eta} = 0$ 的解, 且 (3.544) 的自伴随对称 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是伴随方程 $L_F^*\omega = 0$ 的解, 其中 L_F 和 L_F^* 是算子

$$L_F = \sum_{i=0}^{n} F_{y_i} D^i,$$

$$L_F^* = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}(-1)^i \frac{i!}{(i-j)!j!}(D^{i-j}F_{y_i})D^j$$

在曲面 $F(x, y, y_1, \cdots, y_n) = 0$ 上的限制. ODE (3.544) 的自伴随性 $L_F = L_F^*$ 的准则等价于 $n+2$ 个条件

$$(-1)^n = 1, \quad 即\ n\ 为偶数, \tag{3.545a}$$

$$F_{y_j} = \sum_{i=0}^{n-j}(-1)^{i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!}D^i F_{y_{i+j}}, \quad j = 0, 1, \cdots, n. \tag{3.545b}$$

特别地, ODE (3.544) 必须具有形式 (但除 $n = 2$ 外并不是充分的) $F = Ay_n + B$, 其中 $A_{y_n} = B_{y_n} = 0, 2B_{y_{n-1}} = nD_{n-1}A$, 如果 $n \geqslant 3, A_{y_{n-1}} = 0$, 其中 D_{n-1} 是截断全导数算子 (3.468).

3.7.2 伴随不变性条件和积分因子

由定理 3.6.4.3, n 阶 ODE (3.535) 的 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶积分因子是 $1+[n/2]$ 个方程 (3.470a,b) 的确定系统的解. 特别地, (3.470b) 是 Euler 算子方程 (参看 (3.447)) $E_n(F\Lambda)|_{y_n=0} = 0$, 由引理 3.6.4.1 得到. 现在证明, 由 (3.470b) 和 (3.470a) 的某个微分线性组合可得伴随对称确定方程 (3.543).

引理 3.7.2.1 令 E_n 是 $(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 空间上的截断 Euler 算子 (3.447). 对于任意函数 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell), 0 \leqslant \ell \leqslant n-1$, 归纳定义

$$\Psi_n = \omega, \quad \Psi_{n-k} = \frac{\partial(F\omega)}{\partial y_{n-k}} - D\Psi_{n-k+1}, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{3.546a}$$

$$\Omega_n = \frac{\partial \Psi_n}{\partial y_n} = 0, \quad \Omega_{n-k} = \frac{\partial \Psi_{n-k}}{\partial y_n} + D\frac{\partial \Psi_{n-k+1}}{\partial y_n}, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{3.546b}$$

其中 $F(x, y, y_1, \cdots, y_n)$ 由曲面 (3.536) 给定. 则 $E_n(F\omega)|_{y_n=0} = 0$ 成立当且仅当

$$L_F^*\omega - \sum_{i=0}^{n}(-1)^i D^i(f\Omega_i|_{y_n=0}) = 0. \tag{3.547}$$

证明 由 (3.447) 知 $E_n(F\omega) = \Psi_0$. 现在取 (3.546a) 的 $\partial/\partial y_n$, 则有

$$\Omega_{n-k} = \frac{\partial \omega}{\partial y_{n-k}} - \frac{\partial \Psi_{n-k+1}}{\partial y_{n-1}}, \tag{3.548}$$

使得 (3.546b) 可表示为

$$\Psi_{n-k} = F\Omega_{n-k} - f_{y_{n-k}}\omega - D\Psi_{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.549}$$

则通过 (3.549) 中关于指标 k 的有限步归纳, 得

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= F\Omega_0 - f_y\omega - D(F\Omega_1 - f_{y_1}\omega - D(\cdots - D(F\Omega_{n-1})))\\ &= L_F^*\omega + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i D^i(F\Omega_i)\\ &= E_n(F\omega).\end{aligned}$$

因而, 这就确定了 (3.547). □

定理 3.6.4.3 中关于积分因子的剩余 $[n/2]$ 个确定方程 (3.470a) 等价于方程组 $\partial\Psi_i/\partial y_n = 0, i = 0, 1, \cdots, n-1$. 通过关系 (3.546b), 该系统可写为 $\Omega_i = 0, i = 0, 1, \cdots, n-1$. 则由引理 3.6.4.1 可知, 这些方程依次等价于含有半数方程的更简单的系统

$$\Omega_{n-2m}|_{y_n=0} = 0, \quad m = 1, \cdots, [n/2]. \tag{3.550}$$

称从 (3.548) 和 (3.549) 归纳得到的每个方程

$$\Omega_i|_{y_n=0} = \omega_{y_i} + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{j-1}(D^{j-1}(f_{y_{i+j}}\omega)) + (D^{i-1}\omega)_{y_{n-1}} = 0, \quad i = 0, 1 \cdots, n-1 \tag{3.551}$$

为伴随不变性方程, 且称方程组 (3.550) 为关于 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 的伴随不变性条件. 因而, 由引理 3.7.2.1 和定理 3.6.4.3 立即可得下面的主要结论:

定理 3.7.2.1 ODE (3.535) 的 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶积分因子是 (3.53) 的 ℓ 阶伴随对称, 其满足 $[n/2]$ 个伴随不变性条件 (3.550). 显式地, $\Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 的积分因子当且仅当

$$(-1)^n D^n\Lambda - \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i D^i(f_{y_i}\Lambda) = 0, \tag{3.552a}$$

$$\Lambda_{y_{n-2m}} + \sum_{i=1}^{2m-1}(-1)^{i-1}(D^{i-1}(f_{y_{n-2m+i}}\Lambda))_{y_{n-1}} + (D^{2m-1}\Lambda)_{y_{n-1}} = 0, \quad m = 1, \cdots, [n/2]. \tag{3.552b}$$

由积分因子确定系统 (3.552a,b) 可得有用的假设, 求积分因子如下. 显然, ODE (3.535) 的每个积分因子是伴随对称, 但对于 $n \geqslant 2$, 则不是, 因为如果 ODE (3.535) 的伴随对称是积分因子, 则需要满足伴随不变性条件. 注意, 如果 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 满足伴随对称确定方程 (3.543), 则 $\omega\psi$ 也满足, 其中 $\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 是满足

$D\psi=0$ 的任意函数, 即 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 是 ODE (3.535) 的首次积分. 因而, 如果已经知道 $k\geqslant 1$ 个函数无关的首次积分 $\psi_1(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}),\cdots,\psi_k(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$, 且 $\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 的伴随对称但不是它的积分因子, 则可以寻找乘子函数 $\psi=\psi(\psi_1,\cdots,\psi_k)$, 使得

$$\Lambda=\omega\psi \tag{3.553}$$

满足伴随不变性条件 (3.552b). 特别地, (3.552b) 约化为关于 $\psi(\psi_1,\cdots,\psi_k)$ 的含 $[n/2]$ 个一阶线性齐次 PDEs 的系统. 因而, 假设 (3.553) 允许通过任意已知的伴随对称和首次积分来求积分因子. 3.7.3 节中将用例子来说明该假设.

3.7.3 发现伴随对称和积分因子举例

给定 n 阶 ODE (3.535) 的 ℓ 阶伴随对称 $\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的确定方程 (3.543) 是 n 阶线性齐次 PDE, 它的 $n+1$ 个自变量为 $x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}$. 因而对于 $\ell=n-1$, 伴随对称确定方程 (3.543) 有无穷多个解. 然而对于 $0\leqslant\ell<n-1$, 方程 (3.543) 一般分成超定的线性偏微分方程组, 且至多含有限个线性无关的解. 这些解可以用算法程序来计算, 该程序与发现 $0\leqslant\ell<n-1$ 阶对称所使用的程序是相同的 (参看 3.5.1 节).

如果二阶或高阶 ODE (3.535) 拥有点对称 $\hat\eta=\eta(x,y)-\xi(x,y)y_1$, 使得曲面 (3.536) 是不变的 (即在 (3.235) 所定义的生成元 $\hat X^{(n)}$ 作用下, 有 $\hat X^{(n)}F=0$), 则利用正则坐标 (习题 3.7.7), 可以得到伴随对称确定方程 (3.543) 拥有相应的点对称

$$X^{(n)}=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\sum_{i=1}^{n-1}\eta^{(i)}\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

这就允许我们作简单的假设来求 (3.543) 的解. 特别地, 如果 ODE (3.535) 拥有尺度变换 $\xi=qx,\eta=py$, 即 $x\to\alpha^q x, y\to\alpha^p y$, p, $q=$ const, 则伴随对称确定方程 (3.543) 拥有尺度变换

$$\omega\to\alpha^r\omega,\quad x\to\alpha^q x,\quad y_i\to\alpha^{p-iq}y_i,\quad i=0,1,\cdots,n-1,$$

其中 $r=$ const 是任意常数, 因此, 可以求 (3.543) 的如下形式的不变解 (参看 4.2.1 节)

$$\omega=x^r\rho(y^qx^{-p},x^{q-p}(y_1)^q,\cdots,x^{(n-1)q-p}(y_{n-1})^q),\quad \text{如果 } q\neq 0, \tag{3.554a}$$

$$\omega=y^r\rho(x,y^{-1}y_1,\cdots,y^{-1}y_{n-1}),\quad \text{如果 } p\neq 0. \tag{3.554b}$$

根据不变变量 $x^{iq-p}(y_i)^q, i=0,1,\cdots,n-1$, 或者 $x,y^{-1}y_i,i=1,\cdots,n-1$. 假设 (3.554a,b) 分别将伴随对称确定方程 (3.543) 约化为超定线性偏微分方程组. 类似地,

如果 ODE (3.535) 拥有平移变换 $\xi=1,\eta=0$, 即 $x\to x+\varepsilon, y\to y$, 或 $\xi=0,\eta=1$, 即 $x\to x, y\to y+\varepsilon$, 则伴随对称确定方程 (3.543) 拥有平移变换

$$x\to x+\varepsilon, y\to y, \quad 或\ x\to x, y\to y+\varepsilon,$$

$$y_i\to y_i, \quad i=1,\cdots,n-1,$$

且尺度变换

$$\omega\to \mathrm{e}^{r\varepsilon}\omega,$$

其中 $r=\mathrm{const}$ 是任意常数. 从而, 可以求 (3.543) 如下不变解

$$\omega=\mathrm{e}^{rx}\rho(y,y_1,\cdots,y_{n-1}) \quad 或\ \omega=\mathrm{e}^{ry}\rho(x,y_1,\cdots,y_{n-1}). \tag{3.555}$$

根据不变变量 y, y_i 或 $x, y_i, i=1,\cdots,n-1$. 每个假设 (3.555) 将伴随对称确定方程 (3.543) 约化为超定线性偏微分方程组.

前面的假设明显是 3.5.1 节中所提出的假设的副本, 该假设用于求二阶和高阶 ODEs 的对称确定方程. 现在给出例子来说明伴随对称的计算方法.

作为第一个例子, 考虑非线性 Duffing 方程

$$y''+ay'+by+y^3=0, \quad b=\frac{2}{9}a^2, \quad a=\mathrm{const}, \tag{3.556}$$

它的点形式的积分因子已在 3.6.3 节中给出 (参看 (3.387)). 这里将比较 ODE (3.556) 的点对称和点形式的伴随对称, 然后利用假设 (3.553) 可得第二个积分因子.

(3.556) 的线性化算子为 $L_F=D^2+aD+\frac{2}{9}a^2+3y^2$, 它不是自伴随算子, 因为 $L_F^*=D^2-aD+\frac{2}{9}a^2+3y^2\neq L_F$, 如果 $a\neq 0$. 因而在这种情况下, ODE (3.556) 不是自伴随的, 从而它的伴随对称不是对称的. ODE (3.556) 的伴随对称 $\omega(x,y,y_1)$ 的确定方程 (3.543) 简化为

$$D^2\omega-aD\omega+\left(\frac{2}{9}a^2+3y^2\right)\omega=0, \tag{3.557}$$

其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}-\left(ay_1+\frac{2}{9}a^2y+y^3\right)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

如果考虑点形式的伴随对称 $\omega=\alpha(x,y)+\beta(x,y)y_1$, 那么伴随对称确定方程 (3.557) 约化为四个线性 PDE 的系统

$$\beta_{yy}=0, \tag{3.558a}$$

$$-4a\beta_y+\alpha_{yy}+2\beta_{xy}=0, \tag{3.558b}$$

$$2a^2\beta - \left(\frac{2}{3}a^2y + 3y^3\right)\beta_y - 3a\beta_x - 2a\alpha_y + 2\alpha_{xy} + \beta_{xx} = 0, \tag{3.558c}$$

$$\left(y^3 + \frac{2}{9}a^2y\right)(2a\beta\alpha - 2\beta_x - \alpha_y) + \left(3y^2 + \frac{2}{9}a^2\right)\alpha - a\alpha_x + \alpha_{xx} = 0. \tag{3.558d}$$

其源于 y_1 的幂级数的系数. (3.558a,b) 对 y 积分一次, 得 $\beta = \beta_0(x) + \beta_1(x)y$ 和 $\alpha = (2a\beta_1(x) - \beta_1'(x))y^2 + \alpha_0(x) + \alpha_1(x)y$, 其中 $\alpha_0(x), \alpha_1(x), \beta_0(x), \beta_1(x)$ 是函数. 则由 (3.558c,d) 可得 $\alpha_0 = 0, \beta_1 = 0, \alpha_1 = \beta_0' - a\beta_0$ 和 $3\beta_0'' - 7a\beta_0' + 4a^2\beta_0 = 0$. 因而有

$$\beta = c_1\mathrm{e}^{ax} + c_2\mathrm{e}^{(4a/3)x}, \quad \alpha = \frac{1}{3}c_2a\mathrm{e}^{(4a/3)x}y.$$

从而, ODE (3.556) 拥有两个点形式的伴随对称

$$\omega_1 = \mathrm{e}^{(4a/3)x}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right), \tag{3.559a}$$

$$\omega_2 = \mathrm{e}^{ax}y_1. \tag{3.559b}$$

通过类似的计算, ODE (3.556) 的点对称 $\hat{\eta} = \alpha(x,y) + \beta(x,y)y_1$ 为

$$\hat{\eta}_1 = \mathrm{e}^{(a/3)x}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right), \quad \hat{\eta}_2 = y_1.$$

因此除 $a = 0$ 时, 伴随对称 (3.559a,b) 不是 ODE (3.556) 的对称.

从 3.6.3 节 (参看 (3.387)) 可知, 伴随对称 (3.559a) 是 (3.556) 的积分因子, 然而 (3.559b) 是 ODE (3.556) 的伴随对称, 但不是它的积分因子. 特别地, 伴随对称 (3.559b) 却不满足定理 3.7.2.1 中的伴随不变性条件

$$\Lambda_y - a\Lambda_{y_1} + (D\Lambda)_{y_1} = 0, \tag{3.560}$$

这是伴随对称 ω 成为 ODE (3.556) 的积分因子 $\Lambda = \omega$ 的充要条件. 现在用伴随对称 (3.559b) 求依赖函数 $\psi(\psi_1)$ 的积分因子

$$\Lambda = \psi(\psi_1)\mathrm{e}^{ax}y_1, \tag{3.561}$$

其中

$$\psi_1 = \mathrm{e}^{(4a/3)x}\left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right)^2\right) \tag{3.562}$$

是对应于积分因子 (3.559a) 的首次积分. 注意, 对于任意 $\psi(\psi_1)$, 因为 $D\psi_1 = 0$, 所以 (3.561) 满足伴随对称确定方程 (3.557). 将 (3.561) 代入伴随不变性条件 (3.560) 可得

$$-a\psi + (y_1(\psi_1)_y - \left(ay_1 + \frac{2}{9}a^2y + y^3\right)(\psi_1)_{y_1})\psi' = -a\left(\psi + \frac{4}{3}\psi_1\psi'\right) = 0,$$

可以约化为一阶可分离的 ODE $\psi'/\psi = -\dfrac{3}{4}\psi_1$. 因此有 $\psi(\psi_1) = c(\psi_1)^{-3/4}, c = \text{const}$, 进而得到

$$\Lambda = y_1 \mathrm{e}^{ax}(\psi_1)^{-3/4} = y_1\left(\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right)^2\right)^{-3/4}, \tag{3.563}$$

其给出了 ODE (3.556) 的积分因子. 因为 $\omega_1/\Lambda = \left(1 + \dfrac{1}{3}a(y/y_1)\right)\mathrm{e}^{(a/3)x}(\psi_1)^{3/4}$ 明显不仅仅是 ψ_1 的函数, 由引理 3.6.2.1 可知, 由 Λ 得与 ψ_1 函数无关的首次积分 ψ_2. 用线积分公式 (3.366) 计算 ψ_2, 有

$$\psi_2 = \int_C \left[\left(\frac{2}{9}a^2 y + y^3 + ay_1\right) z^{-3/4}\mathrm{d}y + y_1 z^{-3/4}\mathrm{d}y_1\right], \tag{3.564}$$

其中

$$z(y, y_1) = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right)^2. \tag{3.565}$$

这里选择 C 是 (y, y_1) 平面上的轨线且 $z = \text{const}$, 这可以方便地用满足 $Y(0) = \widetilde{y}, Y_1(0) = \widetilde{y}_1, Y(1) = y, Y_1(1) = y_1$ 的表达式参数化为 $y = Y(\lambda), y_1 = Y_1(\lambda)$,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\lambda} = z_{y_1}(Y, Y_1) = \frac{1}{3}aY + Y_1,$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}\lambda} = -z_y(Y, Y_1) = -Y^3 - \frac{1}{9}a^2 Y - \frac{1}{3}aY_1.$$

积分该系统可得

$$z = \frac{1}{4}Y^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}aY + Y_1\right)^2 = \text{const}, \tag{3.566a}$$

$$\lambda = \int_{\widetilde{y}}^{Y} \frac{\mathrm{d}\tau}{\left(2z - \dfrac{1}{2}\tau^4\right)^{1/2}}. \tag{3.566b}$$

则通过组合这些项, 并用 (3.566a) 简化它们可知, 首次积分 (3.564) 变为

$$\psi_2 = \int_0^1 \frac{4}{3}az^{1/4}\mathrm{d}\lambda = \frac{4}{3}az^{1/4}\int_{\widetilde{y}}^{y} \frac{\mathrm{d}\tau}{\left(2z - \dfrac{1}{2}\tau^4\right)^{1/2}}, \tag{3.567}$$

且 z 由 (3.565) 确定.

首次积分 (3.563) 和 (3.567) 可得 ODE (3.556) 的求积分为 $\psi_1 = \text{const} = c_1, \psi_2 = \text{const} = c_2$. 显然, 有

$$c_2 = \frac{4}{3}a(c_1)^{1/4}\mathrm{e}^{-(1/3)ax}\int_{\widetilde{y}}^{y} \frac{\mathrm{d}\tau}{\left(2c_1\mathrm{e}^{-(4a/3)x} - \dfrac{1}{2}\tau^4\right)^{1/2}}. \tag{3.568}$$

作为第二个例子, 重新考虑三阶 ODE

$$y''' = 6x(y')^{-2}(y'')^3 + 6(y')^{-1}(y'')^2, \tag{3.569}$$

其拥有接触对称, 这已在 3.5.2 节中说明. 3.6.5 节中得到了 ODE (3.569) 的三个二阶积分因子, 由其可得它的完全积分 (参看 (3.517)). 这里求 ODE (3.569) 拥有的一阶伴随对称. 因为 ODE (3.569) 是三阶, 不是自伴随的, 因而它的伴随对称不是对称的. (3.569) 的线性化算子为

$$L_F = D^3 - (18x(y_2)^2(y_1)^{-2} + 12y_2(y_1)^{-1})D^2 + (12x(y_2)^3(y_1)^{-3} + 6(y_2)^2(y_1)^{-2})D.$$

由伴随算子 L_F^*, ODE (3.569) 的伴随对称 $\omega(x, y, y_1)$ 的确定方程 (3.543) 变为

$$D^3\omega + D^2(18x(y_2)^2(y_1)^{-2}\omega + 12y_2(y_1)^{-1}\omega) + D(12x(y_2)^3(y_1)^{-3}\omega + 6(y_2)^2(y_1)^{-2}\omega) = 0, \tag{3.570}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + f\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad f = 6x(y_2)^3(y_1)^{-2} + 6(y_2)^2(y_1)^{-1}.$$

不难证明, 伴随对称确定方程 (3.570) 是关于 y_2 的 6 次多项式, 从而可约化为含 7 个方程的线性系统, 其源于 y_2 的幂的系数. 由 $(y_2)^6$ 的系数确定的方程立即得到 $\omega = 0$. 因而, 与它的 7 个所拥有接触对称和 3 个点对称 (参看 3.5.2 节), 可知 ODE (3.569) 并不拥有一阶伴随对称.

作为最后一个例子, 考虑四阶 ODE

$$(yy'(y(y')^{-1})'')' = 0, \tag{3.571}$$

其源于研究具有波速 $y(x)$ 的波方程. 在 3.5.2 节中, 我们证明了 ODE (3.571) 的直到二阶的对称仅仅由 x 的平移和 x, y 的尺度变换给定的点对称构成. 在 3.6.5 节中, 我们得到了 ODE (3.571) 的两个一阶积分因子, 且可求得二阶可分离的 ODE(参看 (3.525)), 因此可得 ODE (3.571) 的求积分. 这里, 我们求 ODE (3.571) 的直到二阶的伴随对称, 然后应用假设 (3.553) 可得 (3.571) 的额外的积分因子.

首先证明 (3.571) 不是自伴随的. 用可解的形式表示 (3.571) 可得

$$y_4 = f(y, y_1, y_2, y_3) = -\frac{(y_1)^2 y_2}{y^2} + 4\frac{(y_2)^2}{y} - 4\frac{(y_2)^3}{(y_1)^2} - 3\frac{y_1 y_3}{y} + 5\frac{y_2 y_3}{y_1} = 0. \tag{3.572}$$

因为 $f_{y_3} = -3y^{-1}y_1 + 5(y_1)^{-1}y_2 \neq 0$, 由引理 3.7.1.2 立即可知, ODE (3.572) 不是自伴随的. 由 (3.545b) 可知, 同样的结论对于 ODE (3.571) 的最初的形式也成立. 因而, ODE (3.572) 的伴随对称不是 (3.572) 的对称.

ODE (3.572) 的伴随对称 $\omega(x,y,y_1,y_2)$ 的确定方程 (3.543) 更容易由 ODE (3.571) 而不是 ODE (3.572) 的线性化导出. 使得

$$\begin{aligned} &yD((y_2(y_1)^{-1}-2y(y_2)^2(y_1)^{-3}+yy_3(y_1)^{-2})D\widetilde{\omega}) \\ &+(y_1)^{-1}D^2(yy_1D\widetilde{\omega})+D(y(y_1)^{-2}D^2(yy_1D\widetilde{\omega}))=0, \end{aligned} \tag{3.573}$$

且 $\widetilde{\omega}=y_1y^{-2}\omega$, 其中

$$D=\frac{\partial}{\partial x}+y_1\frac{\partial}{\partial y}+y_2\frac{\partial}{\partial y_1}+y_3\frac{\partial}{\partial y_2}+f\frac{\partial}{\partial y_3}.$$

可知伴随对称确定方程 (3.573) 是 y_3 的四次多项式, 因而约化为关于 $\omega(x,y,y_1,y_2)$ 的含五个偏微分方程的线性系统. 为了避免直接求解这个系统的复杂性, 基于假设 (3.554a,b) 和 (3.555) 且用共同的联合不变量

$$u=y(y_1)^{-2}y_2.$$

利用 ODE (3.572) 的 x 平移对称和 x, y 的尺度对称求解 $\omega(x,y,y_1,y_2)$. 因而, 考虑

$$\omega=y^r(y_1)^s\alpha(u),\quad r=\text{const},\quad s=\text{const}. \tag{3.574}$$

则由伴随对称确定方程 (3.573) 中 $(y_3)^4$ 的系数可得 $\alpha^{(4)}=0$, 因而有

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_1u+\alpha_2u^2+\alpha_3u^3,\quad \alpha_i=\text{const}. \tag{3.575}$$

(3.573) 中剩余 y_3 的幂的系数变为 u 的多项式方程组, 其约化为关于 $r,s,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的代数方程. 首先, 由 $(y_3)^3u^7$ 和 $(y_3)^2u^7$ 的系数可知 $\alpha_3=0$. 接着由 $(y_3)^3u^6,(y_3)^2u^6,y_3u^6$, 的系数可得 $(s+1)\alpha_2=0$. 这导致两个情况：$s=-1$ 或者 $\alpha_2=0$. 如果 $s=-1$, 则由 $(y_3)^2u^5$ 和 y_3u^5 系数可得 $\alpha_1=r-2=0$. 因而有

$$\alpha=\alpha_0+\alpha_2u^2,\quad s=-1,\quad r=2, \tag{3.576}$$

容易验证, (3.576) 满足伴随对称确定方程 (3.573). 最后, 如果 $\alpha_2=0$, 那么 $(y_3)^2u^5$ 和 y_3u^5 系数恰恰导致 $\alpha_1=0$. 因此, 由 $(y_3)^2u^4$ 和 y_3u^4 系数得 $s=-3$. 由剩余的系数知 $r=2$. 从而有

$$\alpha=\alpha_0,\quad s=-3,\quad r=2. \tag{3.577}$$

因此, (3.576) 和 (3.577) 诱导出如下的三个伴随对称

$$\omega_1=y^2(y_1)^{-1},\quad \omega_2=y^2(y_1)^{-3},\quad \omega_3=y^4(y_2)^2(y_1)^{-5}. \tag{3.578}$$

由 3.6.5 节的结论 (参看 (3.523)) 可知, 两个一阶伴随对称 ω_1 和 ω_2 是 ODE (3.572) 的积分因子, 然而, 二阶伴随对称 ω_3 不是 ODE (3.572) 的积分因子. 现在通过假设 (3.553), 我们用 ω_3 来求 ODE (3.572) 的高阶积分因子, 这里, 假设 (3.553) 变为

$$\Lambda = y^4(y_2)^2(y_1)^{-5}\psi(\psi_1, \psi_2), \tag{3.579}$$

其依赖函数 $\psi(\psi_1, \psi_2)$, 其中

$$\psi_1 = yy_2 - 2y^2(y_1)^{-2}(y_2)^2 + y^2(y_1)^{-1}y_3, \tag{3.580a}$$

$$\psi_2 = y(y_1)^{-2}y_2 - y^2(y_1)^{-4}(y_2)^2 + y^2(y_1)^{-3}y_3 \tag{3.580b}$$

是相应于积分因子 $\Lambda_1 = \omega_1, \Lambda_2 = \omega_2$ 的首次积分. 因为 $D\psi_1 = D\psi_2 = 0$, 由此可知, 关于任意函数 $\psi(\psi_1, \psi_2)$ 的假设 (3.579) 满足伴随对称确定方程 (3.573). 因而由定理 3.7.2.1 知 ODE (3.572) 的积分因子当且仅当它满足伴随不变性条件

$$\Lambda_{y_2} + (-3y^{-1}y_1 + 5y_2(y_1)^{-1})\Lambda_{y_3} + (D\Lambda)_{y_3} = 0, \tag{3.581a}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda_y + (-2y_1y_2y^{-2} + 8(y_2)^3(y_1)^{-3} - 3y^{-1}y_3 - 5y_2(y_1)^{-2}y_3)\Lambda_{y_3}\\
&- (3y^{-1} + 5y_2(y_1)^{-1})\Lambda\\
&- (D((-(y_1)^2y^{-2} + 8y_2(y_1)^{-1} - 12(y_2)^2(y_1)^{-2} + 5y_3(y_1)^{-1})\Lambda))_{y_3}\\
&+ (D^2((-3y_1y^{-1} + 5y_2(y_1)^{-1})\Lambda) + D^3\Lambda)_{y_3} = 0.
\end{aligned} \tag{3.581b}$$

通过一些简化, 可得伴随不变性条件 (3.581a,b) 约化为单个的 PDE

$$\psi_2\psi_{\psi_2} + \psi_1\psi_{\psi_1} + 2\psi = 0. \tag{3.582}$$

它拥有通解

$$\psi = (\psi_2)^{-2}\widetilde{\psi}\left(\frac{\psi_1}{\psi_2}\right),$$

其中 $\widetilde{\psi}$ 是它的变量的任意函数. 因而通过首次积分和积分因子之间的关系 (3.477), 得积分因子

$$\Lambda_3 = y^4(y_2)^2(y_1)^{-5}(\psi_2)^{-2} = y^4(y_2)^2(y_1)^{-1}(yy_2 - y^2(y_1)^{-2}(y_2)^2 + y^2(y_1)^{-1}y_3)^{-2} \tag{3.583}$$

和相应的函数相关的首次积分

$$\psi_3 = \frac{\psi_1}{\psi_2} = (y_1)^2 - y^2(y_2)^2(yy_2 - y^2(y_2)^2(y_1)^{-2} + y^2(y_1)^{-1}y_3)^{-1}. \tag{3.584}$$

3.7.4 Noether 定理、变分对称和积分因子

n 阶 ODE

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\neq 0 \tag{3.585}$$

具有变分公式, 如果在邻域 $x\in[a,b]$ 中, 它的解 $y=\Theta(x)$ 对应于作用泛函的极值曲线

$$S[y(x)]=\int_a^b L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x. \tag{3.586}$$

特别地, 在函数 $y(x)$ 的空间上, 考虑单参数局部变换群 $x^*=x, y^*=y+\varepsilon V(x)+O(\varepsilon^2)$, 且无穷小生成元为

$$\hat{X}^{(\infty)}=V(x)\frac{\partial}{\partial y}+V'(x)\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots, \tag{3.587}$$

其中 $V(x)$ 是任意函数. 作用 (3.586) 的相应的变分为

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(\infty)}S[y(x)]&=\int_a^b \hat{X}^{(\infty)}L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b V(x)\hat{E}_n(L(x,y,y',\cdots,y^{(n)}))\mathrm{d}x+A(V;x,y,y',\cdots,y^{(2n-1)})\Big|_{x=a}^{x=b},\end{aligned} \tag{3.588}$$

这里

$$\hat{E}_n=\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}+\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}} \tag{3.589}$$

是标准的 Euler 算子用于变分计算 (Olver, 1986), 通过分部积分, 有

$$\begin{aligned}A(V;x,y,y',\cdots,y^{(2n-1)})=&V\frac{\partial L}{\partial y'}+\left(V'\frac{\partial L}{\partial y''}-V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y''}\right)+\cdots\\ &+\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}V^{(n-j)}\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\frac{\partial L}{\partial y^{(n)}},\quad V^{(0)}=V.\end{aligned} \tag{3.590}$$

现在假设 $V(x)$ 和它的导数 $V'(x), V''(x)$ 等在两端 $x=a$, $x=b$ 为零. 从而, 在由 (3.587) 得到的变换作用下, 可固定 $y(x), y'(x), y''(x)$ 的端点的值. 则方程

$$\hat{X}^{(\infty)}S[y(x)]=\int_a^b V(x)\hat{E}_n(L(x,y,y',\cdots,y^{(n)}))\mathrm{d}x=0 \tag{3.591}$$

是 $y(x)$ 成为作用 (3.586) 的极值曲线的必要条件. 因为 $V(x)$ 在邻域 $x\in(a,b)$ 中是任意的, 由此可知, 极值曲线一定满足 Euler-Lagrange ODE

$$\frac{\partial}{\partial y}L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}L(x,y,y',\cdots,y_{(n)})+\cdots$$

$$+(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\frac{\partial}{\partial y^{(n)}}L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0. \tag{3.592a}$$

因而, 给定 ODE (3.585) 相应于作用 (3.586) 的极值曲线当且仅当对于某函数 $L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 和所有函数 $y(x)$, 有

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\hat{E}_n(L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})), \tag{3.592b}$$

通过一个任意可微函数 $W(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 的全导数 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x$, 由任意两个函数可得同样的 Euler-Lagrange 方程 (3.592b), 因为可证明 $\hat{E}_n$ 消除函数当且仅当它具有形式 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x$. 不失一般性, 我们知道, (3.592b) 中允许 L 中 y 的最高阶导数与 F 中 y 的最高阶导数是一样的.

作用的变分 (3.588) 等价于恒等式

$$\begin{aligned}\hat{X}^{(n)}L(x,y,y_1,\cdots,y_n)=&VE_k(L(x,y,y_1,\cdots,y_n))\\&+D_kA(V;x,y,y_1,\cdots,y_{k-1}),\quad k=2n,\end{aligned} \tag{3.593}$$

其在 $(x,y,y_1,\cdots,y_k)$ 空间成立, 其中 $\hat{X}^{(n)}$ 表示生成元$\hat{X}=V\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的 n 阶延拓. $V=V(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是一任意函数 (其中 $\ell\leqslant n$), D_k 是截断全导数算子 (3.468), 且

$$E_k=\sum_{i=0}^{k}(-D_k)^i\frac{\partial}{\partial y_i},\quad k\geqslant 0,\quad y_0=y \tag{3.594}$$

是相应的截断 Euler 算子.

从而由 (3.591) 可知, 关于作用的极值曲线的 Euler-Lagrange 方程 (3.592a) 等价于

$$E_{2n}(L(x,y,y_1,\cdots,y_n))=0.$$

因而, 曲面

$$F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=0 \tag{3.595}$$

定义了作用 (3.586) 的固定点.

定义 3.7.4.1　n 阶 ODE (3.585) 具有作用泛函 (3.586) 给定的变分原理, 如果存在某函数 $L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$, 即 Lagrange 算子, 使得 Euler-Lagrange 方程 (3.592a) 对所有函数 $y=y(x)$ 成立. 等价地, 对于 Lagrange 算子 $L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$, 曲面 (3.595) 可作为固定点

$$F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=E_{2n}(L(x,y,y_1,\cdots,y_n))=0. \tag{3.596}$$

下面建立作用泛函 (3.586) 与 n 阶 ODE (3.585) 的线性化算子的自伴随性之间的基本联系. 如果关系 (3.596) 对于某 Lagrange 算子 $L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 成立, 则

通过直接的计算, 可证明对任意函数 $V=V(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), \ell\leqslant n, (L_F-L_F^*)V=0$ 恒成立. 故 $L_F=L_F^*$. 反之, 如果 $L_F=L_F^*$, 则由条件 (3.545a,b), 可证明

$$L(x,y,y_1,\cdots,y_n)=y\int_0^1 F(x,\lambda y,\lambda y_1,\cdots,\lambda y_n)\mathrm{d}\lambda \tag{3.597}$$

是 Lagrange 算子且可得 (3.596).

定理 3.7.4.1　n 阶 ODE (3.585) 拥有作用泛函 (3.586) 当且仅当 (3.585) 是自伴随的. 因而, (3.597) 给出显式的 Lagrange 算子.

对于 y_n 的可解形式 (3.535) 的自伴随 ODE, 同样的结论也成立. 特别地, Lagrange 算子 (3.597) 可取如下形式

$$L(x,y,y_1,\cdots,y_n)=\frac{1}{2}yy_n-y\int_0^1 f(x,\lambda y,\lambda y_1,\cdots,\lambda y_{n-1})\mathrm{d}\lambda.$$

当 ODE (3.535) 不是自伴随时, 也可以考虑作用泛函, 它的 Euler-Lagrange 方程在相差非常数乘子的范围内可得 (3.535), 即

$$F(x,y,y_1,\cdots,y_n)=(y_n-f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}))h=E_{2n}(L(x,y,y_1,\cdots,y_n)), \tag{3.598}$$

$h=h(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 是某函数. (3.545a,b) 给出了存在这样乘子 $h(x,y,y_1,\cdots,y_n)$ 的充要条件. 习题 3.7.8 考虑了情况 $n=2,3$. 定理 3.7.4.1 对应于 $h(x,y,y_1,\cdots,y_n)\equiv 1$ 的情况.

正如在 3.5.1 节所讨论的, ODE (3.535) 的每个对称可由单参数局部变换群的无穷小来刻画, 该局部变换使得曲面 (3.536) 保持不变. 特别地, 如果 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 所拥有的阶 $0\leqslant\ell\leqslant n-1$ 的对称, 则作用在函数 $y(x)$ 上的相应的局部变换由如下的延拓无穷小生成元确定

$$\hat{X}^{(\infty)}=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\hat{\eta}(x,y,y',\cdots,y^{(\ell)})\right)\frac{\partial}{\partial y^{(i)}}. \tag{3.599}$$

对于自伴随 ODE (3.535), 显然, 任意这样局部变换群使得作用泛函 (3.586) 保持不变.

定义 3.7.4.2　自伴随 ODE (3.535) 所拥有的阶 ℓ 的对称 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是一个变分对称, 如果在相差边值项, 即

$$\hat{X}^{(\infty)}S[y(x)]=\int_a^b \hat{X}^{(\infty)}L(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x=B(\hat{\eta};x,y,y',\cdots,y^{(n+\ell-1)})\Big|_{x=a}^{x=b}$$

的条件下, 作用泛函 (3.586) 在 (3.599) 作用下是不变的, $B(\hat{\eta};x,y,y',\cdots,y^{(n+\ell-1)})$ 是某函数, 不失一般性, 其依赖 x,y 和 $y^{(i)}$ 直到至多 $i=n+\ell-1$ 阶.

作用泛函的不变性在相差一个边值项条件下等价于相差全导数情况下 Lagrange 算子的不变性

$$\hat{X}^{(n)}L(x,y,y_1,\cdots,y_n)=D_kB(V;x,y,y_1,\cdots,y_{k-1}),\quad \hat{X}=V\frac{\partial}{\partial y},\tag{3.600}$$

式中 $V=\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), k=n+\ell$. 依次类推, 利用定理 3.6.4.2 中的 Euler 算子方程, (3.600) 可以等价地表示如下:

定理 3.7.4.2 假设 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是自伴随 ODE (3.535) 的 ℓ 阶对称. 令

$$\theta(x,y,y_1,\cdots,y_k)=\hat{X}^{(n)}L(x,y,y_1,\cdots,y_n),\quad k=n+\ell,$$

其中 $\hat{X}^{(n)}$ 是 $\hat{X}=\hat{\eta}\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的 n 阶延拓. 再归纳地令

$$\Psi_k=\theta_{y_k},\quad \Psi_{k-j}=\theta_{y_{k-j}}-D_k\Psi_{k-j+1},\quad j=1,\cdots,k,$$

式中 D_k 是截断全导数算子 (3.468), 且 $\Psi_0=E_k(\theta)$ 是 Euler 算子 (3.594). 则 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是自伴随 ODE (3.535) 的变分对称当且仅当

$$\frac{\partial\Psi_{k-j}}{\partial y_k}=0,\quad j=0,1,\cdots,k-1,\tag{3.601a}$$

$$\Psi_0=0.\tag{3.601b}$$

关于自伴随 ODE (3.535) 的变分对称 $\hat{\eta}(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$, 定理 3.7.4.2 提供了含 $n+\ell+1$ 个线性确定方程的系统. 由引理 3.7.2.1 和定理 3.7.2.1(自伴随情况) 可知, 该系统等价于对称确定方程

$$D^n\hat{\eta}-\sum_{i=0}^{n-1}f_{y_i}D^i\hat{\eta}=0\tag{3.602a}$$

和 $n/2$ 个伴随不变性条件

$$\hat{\eta}_{y_{n-2m}}+\sum_{i=0}^{2m-i}(-1)^{i-1}(D^{i-1}(f_{y_{n-2m+i}}\hat{\eta}))_{y_{n-1}}+(D^{2m-1}\hat{\eta})_{y_{n-1}}=0,\quad m=1,\cdots,n/2,\tag{3.602b}$$

式中 D 是辅助于曲面 (3.536) 的导数算子 (3.445b). 因而得到含 $1+(n/2)$ 个线性确定方程的系统, 其是自伴随 ODE (3.535) 的对称成为变分对称的充要条件.

定理 3.7.4.3 (变分对称确定方程) 自伴随 n 阶 ODE (3.535) 的变分对称是它的满足 $n/2$ 个伴随不变性条件 (3.602b) 的那些对称 $\hat{\eta}$.

现在, 我们介绍关于变分对称的 Noether 基本定理:

定理 3.7.4.4 (Noether 定理) 对于自伴随 ODE (3.535), 每个 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶的变分对称是积分因子, 反之, 每个 $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$ 阶的积分因子为变分对称. 特别地, 如果 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 的变分对称, 则由

$$\psi(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = B(\hat{\eta}; x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, 0, \cdots) - A(\hat{\eta}; x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}, 0, \cdots) \tag{3.603}$$

可得 (3.535) 的首次积分, 其中 $A(V; x, y, y_1, \cdots, y_{2n-1})$ 和 $B(V; x, y, y_1, \cdots, y_{n+\ell-1})$ 由 (3.593) 和 (3.600) 给定.

证明 假设 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是自伴随 ODE (3.535) 的变分对称. 通过组合 Lagrange 变分 (3.600) 和关于 $V = \hat{\eta}$ 的 (3.593), 可得特征方程

$$\hat{\eta}F = D_{2n}(B - A), \quad F = E_{2n}(L)$$

(参看 3.6.4 节), 这说明 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 的积分因子且相应首次积分为 (3.603).

反之, 假设 $\Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是自伴随 ODE (3.535) 的积分因子. 则有特征方程

$$\Lambda F = D_n \psi, \quad F = E_{2n}(L).$$

通过恒等式 (3.593) 且 $V = \Lambda$, 可得

$$\hat{X}^{(n)} L = D_{2n}(\psi + A), \tag{3.604}$$

因而知 $\hat{X} = \Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\partial/\partial y$ 是单参数局部变换群的无穷小生成元, 使得作用泛函 (3.586) 在相差边值项条件下保持不变. 因为 (3.586) 的极值曲线保持不变, 所以 $\Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 ODE (3.535) 的对称, 从而由 (3.604) 可断定 $\Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是 (3.535) 的变分对称. □

同样地, Noether 定理可以通过下面方式应用于自伴随 ODE(3.535): 首先, 求 ODE (3.535) 的对称, 然后检验这些对称中哪些是变分对称, 即 Lagrange 算子在相差全导数情况下是不变的. 最后, 对于每个变分对称, 计算首次积分 (3.603). 该程序计算起来是十分笨拙的, 因为直接检验不变性 (3.600) 是麻烦的. 定理 3.7.4.3 给出了更多有效的途径. 特别地, 通过解线性确定系统 (3.602a,b), 可得 ODE (3.535) 的那些对称仅仅是变分对称. 最重要的, 可以将 $n/2$ 个伴随不变性条件 (3.602b) 和对称确定方程 (3.602a) 混合用来求解该系统. 事实上, 与 Noether 定理所说的途径相比, 这提供了有意义的计算优点. 而且, 通过定理 3.6.4.3 中的线积分公式, 根据 ODE (3.535) 的变分对称, 可直接执行首次积分的计算.

定理 3.7.4.5 对应于自伴随 ODE (3.535) 的变分对称 (即积分因子) $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 的首次积分是由线积分

$$\psi = \int_C \left[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^{j+1} (D_{n-1})^j (f\hat{\eta})_{y_{i+j}} + (-1)^{n-i} (D_{n-1})^{n-i} \hat{\eta} \right) \right.$$
$$\left. \times (\mathrm{d}y_{i-1} - y_i \mathrm{d}x) + \hat{\eta}(\mathrm{d}y_{n-1} - f\mathrm{d}x) \right],$$

给定的, 式中 C 是从 $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{y}_1, \cdots, \widetilde{y}_{n-1})$ 到 $(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 的任意轨线.

3.7.5　对称、伴随对称和积分因子计算的比较

对于给定的 n 阶 ODE (3.535), 计算它的对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$, 伴随对称 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 和积分因子 $\Lambda(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 的本质是同样的 $(0 \leqslant \ell \leqslant n-1)$. 每一种状况下, 不得不分别求解由 (3.542), (3.543) 和 (3.552a,b) 给定的线性确定方程组. 对于 $0 \leqslant \ell < n-1$, 这些确定系统约化为超定的含有 $\ell + 2$ 个自变量 $x, y, y_1, \cdots, y_\ell$ 的线性齐次偏微分方程组, 从而该系统至多有有限个线性无关的解. 事实上, 能够求所有这些显式解. 然而, 对于 $\ell = n-1$, 确定系统不再是超定的和拥有无穷多个解. 这种情况下, 可以用假设 (如消元、分离变量、点对称不变性) 来求解.

一阶 ODE 的古典情况下, 对称和积分因子之间存在显式的一对一的关系 (参看 3.2.2 节), 换言之, $\hat{\eta}(x, y)$ 是对称的当且仅当 $\Lambda(x, y) = 1/\hat{\eta}(x, y)$ 是积分因子. 而且, 这里积分因子与伴随对称是一样的. 但是, 对于二阶和高阶 ODEs, 这些关系被打破 (即存在伴随不变性条件).

当 $n \geqslant 2$ 时, 与 $\ell = n-1$ 阶的积分因子的解空间的尺寸相比, ODE (3.535) 的同样 $\ell = n-1$ 阶的伴随对称的解空间的尺寸总具有更大基数 (根据自由函数), 因为由定理 3.7.201 可知, 并不是每个伴随对称都满足确定积分因子的 $[n/2]$ 个伴随不变性条件.

ODE (3.535) 的 $\ell = n-1$ 阶的伴随对称和对称的解空间的大小是同样的, 因为对称和伴随对称确定方程具有同样的本性, 即它们都是含 $n+1$ 个自变量 $x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 的线性齐次 PDEs.

$0 \leqslant \ell < n-1$ 阶的对称、伴随对称和积分因子的解空间的情形更复杂, 因为一般地, 给定 n 阶 ODE (3.535) 或许不拥有那样的对称、伴随对称或积分因子. 有趣的是, 如果用特殊的假设考虑 n 阶 ODE (3.535) 的对称、伴随对称和积分因子的话, 如何比较代表性类的解空间的大小. 这就关系到估计哪个更好 (比方说, 点对称分析与点形式积分因子分析).

为了进行显式的比较, 我们对二阶 ODE 进行分类

$$y_2 = f(x, y, y_1), \tag{3.605}$$

其拥有

(1) 点对称

$$\hat{\eta} = y_1; \tag{3.606a}$$

(2) 点形式的伴随对称

$$\omega = y_1; \tag{3.606b}$$

(3) 点形式的积分因子

$$\Lambda = y_1. \tag{3.606c}$$

将 (3.606a) 代入对称确定方程 (3.542), 得

$$D^2 y_1 - f_y y_1 - f_{y_1} D y_1 = f_x = 0.$$

因而, 拥有点对称假设 (3.606a) 的这类 ODE (3.606a) 为

$$f = a(y, y_1) \tag{3.607}$$

(即消去 x), 其依赖任意函数 $a(y, y_1)$. 相反, 将 (3.606b) 代入伴随对称确定方程 (3.543) 有

$$D^2 y_1 - f_y y_1 + D(y_1 f_{y_1}) = f_x + 2ff_{y_1} + y_1 f_{xy_1} + (y_1)^2 f_{yy_1} + y_1 f f_{y_1 y_1} = 0. \tag{3.608}$$

这是关于 $f(x, y, y_1)$ 的二阶非线性 PDE, 因此, 实质上, 它的通解依赖两个自变量的两个任意函数. 但是, 将 (3.606c) 代入伴随不变性条件 (3.3552b) 有

$$(f_{y_1} y_1)_{y_1} + (D y_1)_{y_1} = 2f_{y_1} + y_1 f_{y_1 y_1} = 0. \tag{3.609}$$

解 (3.609) 可得 $f = a_1(x, y)(y_1)^{-1} + a_0(x, y)$, 因而 (3.608) 约化为 $(a_0)_x = (a_1)_y$. 故这类 ODE (3.605) 拥有如下点形式的积分因子假设

$$f = a(x, y)(y_1)^{-1} + \int a_y(x, y)\mathrm{d}x + b(y), \tag{3.610}$$

其依赖任意函数 $a(x, y)$ 和 $b(y)$. ODE (3.535) 的两类 (3.610) 和 (3.607) 包含两个自变量的任意函数, 然而, (3.608) 给定的类依赖两个这样的任意函数. 而且, 这类 (3.610) 也包含一个自变量的额外任意函数.

因此, 点形式的积分因子假设的优先效用正如关于二阶 ODEs 的点对称假设. 更一般地, 关于 n 阶 ODEs 的对称和积分因子的任意特殊假设, 类似的结论也成立.

习 题 3.7

1. 考虑谐振荡方程

$$y'' + \nu^2 y = 0, \quad \nu = \text{const}. \tag{3.611}$$

(a) 证明：ODE(3.611) 的伴随对称与对称是同样的.

(b) 证明：ODE(3.611) 的平移对称 $x \to x+\varepsilon, y \to y$ 是变分对称 (即 (3.611) 的积分因子), 但 (3.611) 的尺度对称 $x \to x, y \to \lambda y$ 却不是. 求源于平移对称的 ODE(3.611) 的首次积分.

(c) 用尺度对称和对应于平移对称的首次积分, 考虑 ODE(3.611) 的假设 (3.553). 证明：由该假设可得 ODE(3.611) 的变分对称, 且该变分对称给出一个与前面提到的首次积分函数无关的首次积分.

(d) 证明：这两个首次积分对应于激素振荡器的能量和相位, 并且给出 ODE (3.611) 的求积分.

2. 考虑 KdV 的行波 ODE(3.499).

(a) 求 ODE(3.499) 的一阶伴随对称, 并且证明所拥有的两个伴随对称满足 (3.499) 的积分因子的伴随不变条件.

(b) 用假设 (3.553) 求得 ODE(3.499) 的另外一个积分因子. 证明：该假设仅仅产生两个函数无关的首次积分, 其对应于一阶积分因子.

(c) 通过 (3.499) 拥有的尺度对称 $x \to \lambda x, y \to \lambda^{-2}y$ 的不变量, 求由假设 (3.554a,b) 给定的 ODE(3.499) 的二阶伴随对称. 证明：这些伴随对称中满足 (3.499) 的积分因子的伴随不变条件.

(d) 利用对应于拥有的一阶和二阶积分因子的首次积分, 求 (3.499) 的求积分.

3. 考虑四阶 ODE

$$y^{(4)} = \frac{4}{3}(y''')^2/y''. \tag{3.612}$$

(a) 证明：(3.612) 不是自伴随的.

(b) 求 (3.612) 的一阶和二阶伴随对称. 证明：满足 (3.612) 的积分因子的伴随不变条件.

(c) 通过 (3.499) 拥有的尺度对称 $x \to \alpha x, y \to \beta y$ 和平移对称 $x \to x+\varepsilon, y \to y+\delta$ 的共同的不变量, 求由假设 (3.554a,b) 给定的 ODE(3.612) 的三阶伴随对称. 证明这些三阶伴随对称中满足 (3.612) 的积分因子的伴随不变条件.

(d) 利用源于所拥有的积分因子的首次积分, 求得 (3.612) 的求积分.

4. 证明：四阶波速 ODE(3.571)(不是可解形式) 不是自伴随的.

5. 证明引理 3.7.1.2.

6. 对于 n 阶 ODE (3.535), 证明：如果 $\psi(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 是首次积分 $\psi_i, i=1,\cdots,k$ 的函数, 且 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是伴随对称, 那么 $\Lambda = \omega\psi$ 满足 (3.552a), (3.552b) 约化为关于 $\psi(\psi_1, \cdots, \psi_n)$ 的一阶线性齐次偏微分方程组.

7. 令$X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是 n 阶 ODE(3.535) 所拥有的点对称的无穷小生成元. 通过利用正则坐标 (参看 3.3.1 节), 证明：对称确定方程 (3.542) 和伴随对称确定方程 (3.543) 拥有 X 的 n 阶延拓的无穷小生成元 $X^{(n)}$.

8. (a) 考虑二阶 ODE: $y''=f(x,y,y')$. 根据乘子 $h(x,y,y_1)$, 求线性齐次 PDE, 它是 $F(x,y,y',y'')=h(x,y,y')(y''-f(x,y,y'))=0$ 成为自伴随 ODE 的充要条件. 证明: 对于任意 $f(x,y,y_1)$, 这样的乘子存在.

(b) 考虑三阶 ODE: $y'''=f(x,y,y',y'')$. 证明: 对任意乘数 $h(x,y,y',y'')$, ODE: $F(x,y,y',y'',y''')=h(x,y,y',y'')(y'''-f(x,y,y',y''))=0$ 都不是自伴随的.

9. 对所用自伴随四阶 ODEs: $y^{(4)}=f(x,y',y'',y''')$ 进行分类.

10. 二阶 ODE: $y''=f(x,y,y')$ 拥有点形式的伴随对称 $\omega=y_1$ 当且仅当 $f(x,y,y_1)$ 满足二阶非线性 PDE(3.608).

(a) 证明: $f=a(x,y)y_1+b(x,y)$ 是 (3.608) 的解, 如果 $a_y=0$ 且 $b_x+2ab=0$.

(b) 证明: $\omega=y_1$ 不是 ODE$y''=a(x)y'+[a(x)]^{-2}b(y)$ 的相应类的积分因子.

(c) 比较这类 ODE (b) 与由 (3.610) 给定的拥有积分因子 $\Lambda=y_1$ 的类.

11. 对二阶 ODEs(3.605), 按下面条件进行分类:

(a) 点对称 $\hat{\eta}=y$;

(b) 点形式伴随对称 $\omega=y$;

(c) 点形式积分因子 $\Lambda=y$;

(d) 一阶对称 $\hat{\eta}=1/y_1$;

(e) 一阶伴随对称 $\omega=1/y_1$;

(f) 一阶积分因子 $\Lambda=1/y_1$.

12. 对三阶 ODEs $y'''=f(x,y,y',y'')$, 按下面条件进行分类:

(a) 点对称 $\hat{\eta}=y_1$;

(b) 点形式伴随对称 $\omega=y_1$;

(c) 点形式积分因子 $\Lambda=y_1$.

13. n 阶 ODE (3.535) 是斜伴随的, 如果 $L_F=-L_F^*$,

(a) 证明: 对任意斜伴随 ODE, 所拥有的对称和伴随对称是同样的;

(b) 对所有二阶、三阶和四阶斜伴随 ODEs 进行分类.

3.8 由对称和伴随对称实现首次积分的直接构造

现在提出两个构造 n 阶 ODEs 的首次积分的额外的方法.

第一种方法是从任意由给定的 ODE 拥有的对称和伴随对称所构成的对求代数的首次积分公式 (即不需要积分). 对于拥有尺度对称的 n 阶 ODE, 我们证明以下两种方式得到的首次积分是一样的, 一种是源于由所拥有的积分因子给定的一对尺度对称和伴随对称; 另一种是源于所拥有积分因子的线积分公式. 因而, 对于这样的 ODE, 根据积分因子, 可以用代数首次积分公式代替线积分公式来构造首次积

分. 最重要的, 无论任意伴随对称是否是积分因子, 代数首次积分公式都可以利用它得到一个首次积分.

第二种方法是对于拥有充分多的对称或伴随对称的 ODEs, 利用 Wronski 行列式求它们的首次积分. 如果可解形式的 n 阶 ODE 并不显式地含有因变量的 $n-1$ 阶导数, 则利用 Wronski 公式, n 个对称或 n 个伴随对称足以获得首次积分. 更一般地, 对于可解形式的 n 阶 ODE, 且基本依赖因变量的 $n-1$ 阶导数, 公式要求至少需要 $n+1$ 个对称或 $n+1$ 个伴随对称, 或等价地, n 个对称和 n 个伴随对称.

3.8.1 源于对称和伴随对称的首次积分

考虑二阶或高阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \quad n \geqslant 2, \tag{3.613}$$

可以用如下曲面表示

$$F(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = y_n - f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) = 0. \tag{3.614}$$

我们知道 ODE(3.613) 的对称 $\hat{\eta}$ 和伴随对称 ω 分别是由 $L_F\hat{\eta} = 0$ 和 $L_F^*\omega = 0$ 的解给定的, 其中 L_F 是 (3.614) 的线性化算子, L_F^* 是伴随算子 (参看 (3.541a,b)). 由引理 3.7.1.1 可知, L_F 和 L_F^* 满足恒等式

$$WL_FV - VL_F^*W = DS[W, V; F], \tag{3.615a}$$

其中

$$S[W, V; F] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j(D^{i-j}V)D^j(WF_{y_{i+1}}), \tag{3.615b}$$

式中 $V(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}), W(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 是任意函数. 因而, 如果令

$$V = \hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell), \quad W = \omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell),$$

则由 (3.615a) 可得 $DS[\omega, \hat{\eta}; F] = 0$. 从而, $S[\omega, \hat{\eta}; F]$ 为常数或 ODE(3.613) 的首次积分, 这依赖于它的相应的积分因子是否恒为零.

定理 3.8.1.1 如果 $(\hat{\eta}, \omega)$ 是 ODE(3.613) 的对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 和伴随对称 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 所构成的对, 则

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}, \omega) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j(D^j\omega)D^{n-j-1}\hat{\eta} + \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j+1}(D^j(\omega f_{y_{i+1}}))D^{i-j}\hat{\eta} \tag{3.616}$$

是 ODE(3.613) 的首次积分, 且 $\partial\hat{\psi}(\hat{\eta}, \omega)/\partial y_{n-1} \neq 0$.

现在, 假设有 ODE(3.613) 的点对称 $\hat{\eta}(x,y,y_1)=\eta(x,y)-\xi(x,y)y_1$ 和由 ODE(3.613) 的积分因子给定的伴随对称 $\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$. 则由 $(\hat{\eta},\omega)$ 对确定的首次积分 (3.616) 和对应于积分因子 $\Lambda=\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的首次积分之间的如下关系成立:

定理 3.8.1.2 令 $\Lambda=\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是 ODE(3.613) 的积分因子, 且相应首次积分为 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$. 如果 $\hat{\eta}=\eta(x,y)-\xi(x,y)y_1$ 是 (3.613) 的点对称, 那么由 (3.616) 给定的首次积分满足

$$\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)=X^{(n-1)}\psi+c,\quad c=\mathrm{const}, \tag{3.617}$$

式中 $X^{(n-1)}$ 是点对称生成元 $X=\xi\dfrac{\partial}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial}{\partial y}$ 的 $(n-1)$阶延拓 (参看 (2.100a,b)). 特别地, 相应于首次积分 (3.617) 的积分因子为

$$\hat{\Lambda}(\hat{\eta},\omega)=X^{(n-1)}\omega+R_{n-1}\omega, \tag{3.618}$$

式中

$$R_{n-1}\equiv\frac{\partial\eta^{(n-1)}}{\partial y_{n-1}}=\eta_y-n\xi_y y_1-(n-1)\xi_x.$$

证明 由 (3.616) 计算积分因子 $\hat{\Lambda}(\hat{\eta},\omega)=\partial\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)/\partial y_{n-1}$. 首先, 因为 $\partial\hat{\eta}/\partial y_i=0$ 对于 $i\geqslant 2$ 都成立, $\partial\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)/\partial y_{n-1}$ 中包含 $D^k\hat{\eta}$ 的 $\partial/\partial y_{n-1}$ 微分项约化为

$$\omega(DD^{n-2}\hat{\eta})_{y_{n-1}}-(\omega f_{y_{n-1}}+D\omega)(D^{n-2}\hat{\eta})_{y_{n-1}}, \tag{3.619}$$

其中

$$(D^{n-2}\hat{\eta})_{y_{n-1}}=-\xi,$$

$$(DD^{n-2}\hat{\eta})_{y_{n-1}}=-(n-1)D\xi-f_{y_{n-1}}\xi+\eta_y-\xi_y y_1.$$

接着, 由 $\partial\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)/\partial y_{n-1}$ 中不包含 $D^k\hat{\eta}$ 的微分的项可得

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left((-1)^{n-k-1}(D^{n-k-1}\omega)_{y_{n-1}}+\sum_{i=1}^{n-k-1}(-1)^i(D^{i-1}(\omega f_{y_{k+i}}))_{y_{n-1}}\right)D^k\hat{\eta}+\omega_{y_{n-1}}D^{n-1}\hat{\eta}. \tag{3.620}$$

因为 $\omega(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是 ODE(3.613) 的积分因子, 所以伴随不变性条件 (3.551) 成立, 利用该条件, (3.620) 可简化为

$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega_{y_k}D^k\hat{\eta}. \tag{3.621}$$

现在组合 (3.621) 和 (3.619), 可得

$$\frac{\partial\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)}{\partial y_{n-1}} = R_{n-1}\omega + \sum_{k=0}^{n-1}\omega_{y_k}D^k(\eta-\xi y_1)+\xi D\omega.$$

恒等式 $D^k(\eta-\xi y_1)=\eta^{(k)}-\xi y_{k+1}, 0\leqslant k\leqslant n-1$((32.219)) 诱导出

$$\frac{\partial\hat{\psi}(\hat{\eta},\omega)}{\partial y_{n-1}} = X^{(n-1)}\omega + R_{n-1}\omega.$$

因此, 我们建立了 (3.618). 最后, 由定理 3.6.3.7 可得 (3.617). □

现在, 如果 ODE(3.613) 拥有尺度对称

$$\hat{\eta}_S = \eta-\xi y_1, \quad 其中 y_2 = f(x,y,y_1)\eta = py, \xi = qx, \tag{3.622a}$$

即 $x\to\alpha^q x, y\to\alpha^p y$, $p=\text{const}$, $q=\text{const}$ 是常数, 则

$$X_S^{(n)}(y_n - f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})) = (p-nq)(y_n-f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})), \tag{3.622b}$$

其中 $p-nq$ 是曲面 (3.614) 的尺度权重, 即在 $X_S^{(n)}$ 作用下有 $F\to\alpha^{p-nq}F$. 如果 ODE(3.613) 的积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 关于 $x\to\alpha^q x, y\to\alpha^p y, y_i\to\alpha^{p-qi}y_i$ 作用下的该尺度对称 $\Lambda\to\alpha^s\Lambda$ 是齐次的, 那么

$$X_S^{(\ell)}\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell) = s\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell) \tag{3.623}$$

对于某个 s 定义了 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的尺度权重.

定义 3.8.1.1 ODE(3.613) 的齐次积分因子 (3.623) 关于尺度对称 (3.622a) 具有临界的尺度权重, 如果 $s=(n-1)q-p$.

在尺度对称情况下, 由定理 3.8.1.2 可得关于首次积分的代数公式.

定理 3.8.1.3 假设 ODE(3.613) 拥有尺度对称 (3.622a,b). 令 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 是 (3.613) 的齐次积分因子且尺度权重 (3.623), 令 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 是相应的齐次首次积分. 则有

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_S,\Lambda) = r\psi, \tag{3.624}$$

式中

$$r = s+p-(n-1)q. \tag{3.625}$$

特别地, 如果 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)$ 的尺度权重不是临界的, 即 $r\neq 0$, 那么有

$$\begin{aligned}\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}) &= r^{-1}\hat{\psi}(\hat{\eta}_S,\Lambda) = r^{-1}((p-(n-1)q)y_{n-1}-qxf)\Lambda\\ &+r^{-1}\sum_{i=0}^{n-2}((p-iq)y_i-qxy_{i+1})\left((-1)^{n-i-1}D^{n-i-1}\omega+\sum_{j=1}^{n-i-1}(-1)^jD^{j-1}(\omega f_{y_{i+j}})\right).\end{aligned} \tag{3.626}$$

现在用若干例子来应用定理 3.8.1.1~ 定理 3.8.1.3.

作为第一个例子, 考虑非线性 Duffing 方程

$$y'' + ay' + by + y^3 = 0, \tag{3.627}$$

其不是自伴随的, 若 $a \neq 0$(即阻尼常数不为零). ODE(3.627) 的点对称为

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \tag{3.628a}$$

$$\hat{\eta}_2 = \mathrm{e}^{(a/3)x}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right), \quad 如果\ b = \frac{2}{9}a^2. \tag{3.628b}$$

(3.627) 的伴随对称为 (参看 3.7.3 节)

$$\omega_1 = \mathrm{e}^{ax}y_1, \tag{3.629a}$$

$$\omega_2 = \mathrm{e}^{(4a/3)x}\left(\frac{1}{3}ay + y_1\right), \quad 如果\ b = \frac{2}{9}a^2. \tag{3.629b}$$

这里, 利用由 (3.628a,b) 和 (3.629a,b) 确定的四对对称和伴随对称, 应用定理 3.8.1.1 可得 ODE(3.627) 的首次积分为

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}, \omega) = \omega D\hat{\eta} - \hat{\eta}D\omega + a\xi\hat{\eta}, \tag{3.630}$$

式中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} - (ay_1 + by + y^3)\frac{\partial}{\partial y_1}.$$

将 (3.628a,b) 和 (3.629a,b) 代入 (3.630), 可得

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_2) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_1) = 0, \tag{3.631a}$$

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_2) = -\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_1) = -\frac{2}{3}a\mathrm{e}^{(4a/3)x}\left(\left(y_1 + \frac{1}{3}ay\right)^2 + \frac{1}{2}y^4\right). \tag{3.631b}$$

于是得单个的首次积分, 其是首次积分

$$\psi_2 = \mathrm{e}^{(4a/3)x}\left(\frac{1}{2}\left(y_1 + \frac{1}{3}ay\right)^2 + \frac{1}{4}y^4\right), \quad 如果\ b = \frac{2}{9}a^2, \tag{3.631c}$$

的 $-4a/3$ 倍, 其中 ψ_2 是由 ODE(3.627) 的积分因子 $\Lambda = \omega_2$ 给定的首次积分 (参看 3.6.3 节). 由定理 3.8.1.2, 注意, (3.631a,b) 对应于点对称生成元

$$X_1^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial x}$$

和

$$X_2^{(1)} = -\mathrm{e}^{(a/3)x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3}a\mathrm{e}^{(a/3)x}y\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{e}^{(a/3)x}\left(\frac{2}{3}ay_1 + \frac{1}{9}a^2y\right)\frac{\partial}{\partial y_1}$$

的作用, 即$X_1^{(1)}\psi_2 = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_2) = -\dfrac{4}{3}a\psi_2$, $X_2^{(1)}\psi_2 = \hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_2) = 0$.

考虑第二个例子, 即三阶非线性 ODE

$$y''' + yy' = 0, \tag{3.632}$$

(3.632) 描述 KdV 方程的行波解 (看习题 4.1.2). 因为 (3.632) 是三阶 ODE, 所以不是自伴随的. 它拥有的点对称是由 x 的平移变换和 x, y 的尺度变换确定的:

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \tag{3.633a}$$

$$\hat{\eta}_2 = -2y - xy_1. \tag{3.633b}$$

它的一阶伴随对称 (参看习题 3.7.2) 为

$$\omega_1 = 1, \tag{3.634a}$$

$$\omega_2 = y, \tag{3.634b}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{3}y^3 + (y_1)^2. \tag{3.634c}$$

两个点形式的伴随对称 (3.634a,b) 是 ODE(3.632) 的积分因子 (参看 3.6.5 节), 然而 (3.634c) 是一阶伴随对称, 且不是 ODE(3.632) 的积分因子. 在尺度对称 (3.633b) 作用下, 伴随对称 (3.634a~c) 是齐次的, 且尺度权重分别为

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = -6. \tag{3.635}$$

现在, 在对称 (3.633a,b) 和伴随对称 (3.634a~c) 作用下, 应用定理 3.8.1.1 求得 ODE(3.632) 的首次积分为

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}, \omega) = \omega D^2\hat{\eta} - (D\omega)D\hat{\eta} + \hat{\eta}D^2\omega + y\omega\hat{\eta}, \tag{3.636}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} - yy_1\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

首先, 利用尺度对称 $\hat{\eta} = \hat{\eta}_2$. 将 (3.634a,b) 代入 (3.636), 得

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_1) = -4\left(y_2 + \frac{1}{2}y^2\right) = -4\psi_1, \tag{3.637a}$$

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_2) = -6\left(yy_2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}(y_1)^2\right) = -6\psi_2, \tag{3.637b}$$

它是积分因子 (3.634a,b) 给定的首次积分 ψ_1 和 ψ_2 的尺度乘子 $r_1 = -4$ 和 $r_2 = -6$. 注意, 这些尺度因子与定理 3.8.1.3 是一致的, 因为从定理 3.8.1.3 中的 (3.625) 可知 $r_i = s_i - 4, i = 1, 2$. 下面, 将 (3.634c) 代入 (3.636) 产生函数相关的首次积分

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_3) = -4\psi_1\psi_2. \tag{3.638}$$

最后, 如果使用 (3.636) 中的平移对称 $\hat{\eta} = \hat{\eta}_1$ 且 (3.634a~c), 那么可得

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_1) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_2) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_3) = 0.$$

第三个例子, 考虑四阶 ODE

$$(yy'(y(y')^{-1})'')' = 0,$$

或等价于

$$y^{(4)} = f(y, y', y'', y''') = -\frac{(y')^2 y'''}{y^2} + \frac{4(y'')^2}{y} - \frac{4(y'')^3}{(y')^2} - \frac{3y'y'''}{y} + \frac{5y''y'''}{y'}, \tag{3.639}$$

其源于具有波速 $y(x)$ 的波动方程对称性质的研究. ODE(3.639) 不是自伴随的 (参看 3.7.3 节). 它拥有的点对称是由 x 的平移变换和 x, y 的尺度变换确定的:

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \tag{3.640a}$$

$$\hat{\eta}_2 = y, \tag{3.640b}$$

$$\hat{\eta}_3 = -xy_1. \tag{3.640c}$$

它不拥有任意接触对称或二阶对称 (参看 3.5.2 节). (3.639) 的直到二阶的伴随对称 (参看 3.7.3 节) 为

$$\omega_1 = \frac{y^2}{y_1}, \tag{3.641a}$$

$$\omega_2 = \frac{y^2}{(y_1)^3}, \tag{3.641b}$$

$$\omega_3 = y^4\frac{(y_2)^2}{(y_1)^5}, \tag{3.641c}$$

其中 (3.641a,b) 是积分因子, 但 (3.641c) 却不是 (参看 3.6.5 节). 对应于 (3.641a,b) 的首次积分为

$$\psi_1 = y^2(y_1)^{-1}y_3 + yy_2 - 2y^2(y_1)^{-2}(y_2)^2, \tag{3.642a}$$

$$\psi_2 = y^2(y_1)^{-3}y_3 + y(y_1)^{-2}y^2 - y^2(y_1)^{-4}(y_2)^2, \tag{3.642b}$$

这里, 用对称 (3.640a~c) 和伴随对称 (3.641a~c), 应用定理 3.8.1.1 和定理 3.8.1.3 可得首次积分 (3.642a,b). 首先, 利用平移对称 (3.640a) 可得, 由首次积分公式 (3.616) 平凡地得到 $\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_1) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_2) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \omega_3) = 0$. 然后, 考虑尺度对称 (3.640b,c). (3.641a~c) 的尺度权重关于 (3.640b) 和 (3.640c) 分别为 $s_1 = s_3 = -s_2 = 1$ 和 $s_1 = s_3 = 1, s_2 = 3$. 由首次积分公式 (3.616) 得

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_1) = -\hat{\psi}(\hat{\eta}_3, \omega_1) = 2\psi_1, \tag{3.643a}$$

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_2) = \hat{\psi}(\hat{\eta}_3, \omega_2) = 0, \tag{3.643b}$$

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_2, \omega_3) = -\hat{\psi}(\hat{\eta}_3, \omega_3) = 2\psi_1\psi_2, \tag{3.643c}$$

其中 (3.643a,b) 分别为 (3.642a,b) 的尺度乘子 $r_1 = 2$ 和 $r_2 = 0$. 注意, $r_2 = 0$ 反映出 ψ_2 的 x, y 尺度不变性, 即 ω_2 关于 (3.640b,c) 具有临界尺度权重.

3.8.2 用对称或伴随对称从 Wronski 公式获得首次积分

再次考虑二阶或高阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \quad n \geqslant 2, \tag{3.644}$$

它可由曲面

$$y_n = f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) \tag{3.645}$$

表示. 根据算子

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + \cdots + y_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_{n-2}} + f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})\frac{\partial}{\partial y_{n-1}}$$

可知 ODE(3.644) 的对称和伴随对称的确定方程都是 n 阶线性齐次方程. 特别地, 两个确定方程都具有如下形式

$$D^n\rho + A_{n-1}D^{n-1}\rho + \cdots + A_1D\rho + A_0\rho = 0, \tag{3.646}$$

其中对于 ODE(3.644) 的对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$, 在 (3.646) 中有

$$\rho = \hat{\eta}, \quad A_i = f_{y_i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{3.647a}$$

且 $y_0 = y$; 对于 ODE(3.644) 的伴随对称 $\omega(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$, 在 (3.646) 中有

$$\rho = \omega, \quad A_i = \sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^{n+i+j}\frac{(i+j)!}{i!j!}D^j f_{y_{i+j}}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1, \tag{3.647b}$$

且 $y_0 = y$.

定义 3.8.2.1 如果 $\{\rho_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 阶线性齐次 PDE (3.646) 的 n 个解集, 那么 $\{\rho_i\}$ 的 Wronski 行列式为如下的 $n \times n$ 阶矩阵

$$W(\rho_1, \cdots, \rho_n) = \begin{vmatrix} \rho_1 & \cdots & \rho_n \\ D\rho_1 & \cdots & D\rho_n \\ \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}\rho_1 & \cdots & D^{n-1}\rho_n \end{vmatrix}. \tag{3.648}$$

行列式 (3.648) 拥有完全类似于 n 阶线性 ODEs 的古典 Wronski 行列式的性质 (Coddington, 1961).

定义 3.8.2.2 确定方程 (3.646) 的 k 个解组成的集合 $\{\rho_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\}, i = 1, 2, \cdots, k$ 关于曲面 (3.645) 是线性相关的, 如果对于满足 $Dc_i = 0$ 的某函数 $c_i(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}), \sum_{i=1}^{k} c_i\rho_i = 0$ 成立. 否则, (3.646) 的 k 个解组成的集合 $\{\rho_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\}(i = 1, 2, \cdots, k)$ 关于曲面 (3.645) 是线性无关的.

与通常严格的函数线性相关性相比, 定义 3.8.2.2 是更强些. 特别地, 确定方程 (3.646) 的解集在严格意义下是线性无关的 (即没有解是其他解的常系数的线性组合), 但关于曲面 (3.645) 或许还是线性相关的.

引理 3.8.2.1 令 $\{\rho_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 是确定方程 (3.646) 的 n 个解组成的解集. 则 $W(\rho_1, \cdots, \rho_n) = 0$ 当且仅当该集合关于曲面 (3.645) 是线性相关的.

证明 令 $\{\rho_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 (3.646) 的 n个严格线性无关的解构成的集合. 如果 $\{\rho_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性相关的, 那么 $\sum_{i=1}^{n} c_i\rho_i = 0$ 成立且 $Dc_i = 0$. 因而关于 D 重复微分, 可得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i D^k \rho_i = 0, \quad k \geqslant 0.$$

从而, Wronski 行列式 (3.648) 的列向量是线性相关的, 即

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \begin{bmatrix} \rho_i \\ D\rho_i \\ \vdots \\ D^{n-1}\rho_i \end{bmatrix} = 0, \tag{3.649}$$

所以, Wronski 行列式 $W(\rho_1, \cdots, \rho_n)$ 为零.

反之, 如果 Wronski 行列式满足 $W(\rho_1,\cdots,\rho_n)=0$, 那么对于某些不全为零的系数函数 c_i, 它的列向量是线性相关的. 显然, 不失一般性, 可假设 $c_n\neq 0$. 现在对 n 进行归纳. 假设 $n=2$, 则由 (3.649) 有

$$\rho_2=\widetilde{c}\rho_1, \tag{3.650a}$$

$$D\rho_2=\widetilde{c}D\rho_1, \tag{3.650b}$$

且 $\widetilde{c}=-c_1/c_2$. 将 (3.650a) 代入 (3.650b) 得 $D\widetilde{c}=0$, 因而集合 $\{\rho_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性相关的. 现在假设 $n>2$. 为了继续递归, 假设如果 $\{\rho_i\}$ 的恰当的子集的 Wronski 行列式为零, 那么该子集关于曲面 (3.645) 是线性相关的. 考虑 $n>2$ 时的 (3.649) 且用 c_n 划分该方程. 第二行减去第一行的微分 D 得方程

$$\sum_{i=1}^{n-1}\hat{c}_i\rho_i=0,\quad \hat{c}_i=D\left(\frac{c_i}{c_n}\right). \tag{3.651}$$

类似地, (3.649) 的其他行导致

$$\sum_{i=1}^{n-1}\hat{c}_iD^k\rho_i=0,\quad k=0,1,\cdots,n-2. \tag{3.652}$$

现在需要考虑两种情况. 如果对所有 $i\leqslant n-1$, 有 $\hat{c}_i=0$, 那么由 (3.649) 的第一排得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{c}_i\rho_i=0$ 且 $\widetilde{c}_i=c_i/c_n$, 其中 $D\widetilde{c}_i=0$. 否则, 如果对某些 $i\leqslant n-1$, 有 $\hat{c}_i\neq 0$, 则由 (3.651) 和 (3.652) 可知, 行列式 $W(\rho_1,\cdots,\rho_{n-1})$ 有线性相关的列向量, 因而有 $W(\rho_1,\cdots,\rho_{n-1})=0$. 从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{c}_i\rho_i=0$ 且 $\widetilde{c}_n=0$, $\widetilde{c}_i=\hat{c}_i, i=1,\cdots,n-1$, 其中利用递归假设有 $D\widetilde{c}_i=0$. 另一种情况, 考虑集合 $\{\rho_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性相关的. □

类似于古典 Wronski 行列式的情况, 存在下面的结论. 证明留作习题 3.8.6.

引理 3.8.2.2 令 $\{\rho_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell)\}, i=1,2,\cdots,n$ 是确定方程 (3.646) 的 n 个解组成的集合, 则 Wronski 行列式 (3.648) 满足一阶线性 PDE

$$DW(\rho_1,\cdots,\rho_n)=A_{n-1}W(\rho_1,\cdots,\rho_n). \tag{3.653}$$

当 (3.646) 分别是对称确定方程或伴随对称确定方程时, (3.636) 中系数 A_{n-1} 是由 $f_{y_{n-1}}$ 或者 $-f_{y_{n-1}}$ 给定的. 因此, 如果 ODE (3.645) 不包含 y_{n-1}, 则 $A_{n-1}=0$, 从而 (3.653) 得到 $DW(\rho_1,\cdots,\rho_n)=0$. 这就建立了下面的定理:

定理 3.8.2.1 假设 n 阶 ODE (3.645) 不包含 y_{n-1}, 即 $f_{y_{n-1}}=0$. 令 $\rho_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), i=1,2,\cdots,n$ 是 (3.645) 的 n 个对称或 n 个伴随对称. 如果

这个集 $\{\rho_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性无关的, 那么假如 $\partial\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n)/\partial y_{n-1}\neq 0$, 则由

$$\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n)=\begin{vmatrix}\rho_1 & \cdots & \rho_n\\ D\rho_1 & \cdots & D\rho_n\\ \vdots & & \vdots\\ D^{n-1}\rho_1 & \cdots & D^{n-1}\rho_n\end{vmatrix} \tag{3.654}$$

可得 ODE (3.645) 的一个首次积分.

如果 y_{n-1} 出现在 ODE (3.645) 中, 则 (3.653) 中的系数 A_{n-1} 是非零的. 这种情况下, 假如知道对称或伴随对称的确定系统 (3.646) 的至少 $n+1$ 个线性无关的解, 或者知道 n 个对称和 n 个伴随对称, 则由 (3.653) 还可得首次积分.

定理 3.8.2.2 假设 n 阶 ODE (3.645) 实质依赖 y_{n-1}, 即 $f_{y_{n-1}}\neq 0$, 且 (3.645) 的伴随对称不是它的对称.

(i) 令 $\rho_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), \widetilde{\rho}_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), i=1,2,\cdots,n$ 都是 (3.645) 的 n 个对称或 n 个伴随对称. 如果每个集 $\{\rho_i\}$ 和 $\{\widetilde{\rho}_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性无关的, 那么假若 $\partial\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n,\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n)/\partial y_{n-1}\neq 0$, 则由

$$\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n,\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n)=W(\rho_1,\cdots,\rho_n)/W(\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n) \tag{3.655a}$$

可得 ODE (3.645) 的首次积分.

(ii) 令 $\rho_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), i=1,2,\cdots,n$ 是 (3.645) 的 n 个对称且 $\widetilde{\rho}_i(x,y,y_1,\cdots,y_\ell), i=1,2,\cdots,n$ 是 (3.645) 的 n 个伴随对称. 如果每个集 $\{\rho_i\}$ 和 $\{\widetilde{\rho}_i\}$ 关于曲面 (3.645) 是线性无关的, 那么假若 $\partial\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n,\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n)/\partial y_{n-1}\neq 0$, 则由

$$\hat{\psi}(\rho_1,\cdots,\rho_n,\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n)=W(\rho_1,\cdots,\rho_n)W(\widetilde{\rho}_1,\cdots,\widetilde{\rho}_n) \tag{3.655b}$$

可得 ODE (3.645) 的首次积分.

证明留作习题 3.8.7.

特别地, 如果知道集合含有 $n+1$ 个对称 (或 $n+1$ 个伴随对称), 且关于曲面 (3.645) 是线性无关的, 那么通过考虑 n 个对称 (n 个伴随对称) 的 $n+1$ 个不同子集, 可以获得 ODE(3.644) 的 $n+1$ 个首次积分 (3.655a). 当 $n+1$ 个首次积分中的 r 个函数无关时, 这将 (3.644) 约化为 $n-r$ 阶 ODE. 如果 $r=n$, 则可得 ODE (3.644) 的求积分, 即它的通解依赖 n 个基本常数.

注意, 对于 n 阶 ODE (3.644), 如果知道一个集合含有 $1\leqslant k\leqslant n$ 个对称 (伴随对称), 且是关于曲面 (3.645) 是线性相关的, 即 $\sum\limits_{i=1}^{k}c_i\rho_i=0$, 其中 $Dc_i=0$, 则假如 $\partial c_i/\partial y_{n-1}\neq 0$, 可知由每个系数 $c_i(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1}), i=1,2,\cdots,k$ 可得 (3.644) 的首次积分.

现在用若干例子来说明定理 3.8.2.2 的应用. 在下一节和习题 3.8.2 中将考虑定理 3.8.2.1 的应用.

对于第一个例子, 考虑二阶 ODE (Stephani, 1989)

$$y'' = 2(y')^2 \cot y + \sin y \cos y, \tag{3.656}$$

(3.656) 描述了单位球体 (x 是极角或经度, y 是方位角或纬度) 上的测地学, 即大圆弧 (3.656) 拥有的点对称 (参看习题 3.5.3) 为

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \tag{3.657a}$$

$$\hat{\eta}_2 = \sin x - y_1 \cot y \cos x, \tag{3.657b}$$

$$\hat{\eta}_3 = \cos x + y_1 \cot y \sin x. \tag{3.657c}$$

点对称 (3.657a~c) 构成 Lie 代数 SO(3), 且生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \cot y \cos x \frac{\partial}{\partial x} + \sin x \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \cot y \sin x \frac{\partial}{\partial x} - \cos x \frac{\partial}{\partial y}.$$

现在应用定理 3.8.2.2(i), 利用 (3.657a~c) 可得 ODE (3.656) 的首次积分, 于是得到它的完全求积分. 源于由 (3.657a~c) 获得的三对对称的 Wronski 行列式 (3.648) 为

$$W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 \\ D\hat{\eta}_1 & D\hat{\eta}_2 \end{vmatrix} = \frac{((y_1)^2 + \sin^2 y)(y_1 \cos x - \sin x \sin y \cos y)}{\sin^2 y}, \tag{3.658a}$$

$$W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3) = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_3 \\ D\hat{\eta}_1 & D\hat{\eta}_3 \end{vmatrix} = -\frac{((y_1)^2 + \sin^2 y)(y_1 \sin x + \cos x \sin y \cos y)}{\sin^2 y}, \tag{3.658b}$$

$$W(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_2 & \hat{\eta}_3 \\ D\hat{\eta}_2 & D\hat{\eta}_3 \end{vmatrix} = -((y_1)^2 + \sin^2 y), \tag{3.658c}$$

其中

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1 \frac{\partial}{\partial y} + (2(y_1)^2 \cot y + \sin y \cos y) \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

因此, 源于 (3.658a~c) 的比率 (3.655a) 可得三个首次积分

$$\psi_1 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)}{W(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)} = \frac{-y_1 \cos x + \sin x \sin y \cos y}{\sin^2 y}, \tag{3.659a}$$

$$\psi_2 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3)}{W(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)} = \frac{y_1 \sin x + \cos x \sin y \cos y}{\sin^2 y}, \tag{3.659b}$$

$$\psi_3 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3)} = \frac{-y_1 \cos x + \sin x \sin y \cos y}{y_1 \sin x + \cos x \sin y \cos y}. \tag{3.659c}$$

显然, (3.659a~c) 的任两个是函数无关的, 从而得到二阶 ODE(3.656) 的求积分. 特别地, 由 $\psi_1 = \text{const} = c_1, \psi_2 = \text{const} = c_2$ 可得它的通解

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x = \cot y. \tag{3.660}$$

作为第二个例子, 考虑非线性 Duffing 方程 (3.627), 其拥有两个点对称 (3.628a, b) 和两个点形式伴随对称 (3.629a,b). 这里, 我们应用定理 3.8.2.2(ii), 且利用 (3.628 a,b) 和 (3.629a,b) 来推得首次积分 (3.631c). 对应于 (3.628a,b) 和 (3.629a,b) 的 Wronski 行列式为

$$W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_1 & \hat{\eta}_2 \\ D\hat{\eta}_1 & D\hat{\eta}_2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} a e^{(a/3)x} \left(\frac{1}{2} \left(y_1 + \frac{1}{3} a y \right)^2 + \frac{1}{4} y^4 \right), \tag{3.661a}$$

$$W(\omega_1, \omega_2) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ D\omega_1 & D\omega_2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3} a e^{(7a/3)x} \left(\frac{1}{2} \left(y_1 + \frac{1}{3} a y \right)^2 + \frac{1}{4} y^4 \right). \tag{3.661b}$$

故由相应的乘积 (3.655b) 可得首次积分

$$\psi = \frac{4}{3} a e^{(4a/3)x} \left(\frac{1}{2} \left(y_1 + \frac{1}{3} a y \right)^2 + \frac{1}{4} y^4 \right)^2, \tag{3.662}$$

它是 (3.631c) 的平方的一个乘子.

第三个例子, 考虑由如下曲面

$$y_3 = -y y_1 = f(y, y_1) \tag{3.663}$$

表示的三阶非线性 ODE(3.632). ODE(3.663) 拥有一阶伴随对称 (3.634a~c). 因为 $f_{y_2} = 0$, 由定理 3.8.2.1 可知, 由三个伴随对称可得 ODE(3.663) 的首次积分 (3.654). 然而, 可知源于 (3.634a~c) 的 Wronski 行列式为零

$$W(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ D\omega_1 & D\omega_2 & D\omega_3 \\ D^2\omega_1 & D^2\omega_2 & D\omega_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y & \frac{1}{3} y^3 + (y_1)^2 \\ 0 & y_1 & (y^2 + 2y_2) y_1 \\ 0 & y_2 & y^2 y_2 + 2(y_2)^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.664}$$

从而, 由引理 3.8.2.1 可知, 伴随对称 (3.634a~c) 关于曲面 (3.663) 是线性相关的, 因此, 这种情况下我们不能应用定理 3.8.2.1. 但是, 由 (3.634a~c) 中的线性相关性直接可得如下两个首次积分. 由 (3.664) 有

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} y \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} y^3 + (y_1)^2 \\ y^2 y_1 + 2 y_1 y_2 \\ y^2 y_2 + 2(y_2)^2 \end{bmatrix} = 0, \tag{3.665}$$

式中某函数 c_i 满足

$$Dc_i = 0, \quad \text{这里 } D = \frac{\partial}{\partial x} + y_1\frac{\partial}{\partial y} + y_2\frac{\partial}{\partial y_1} - yy_1\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

线性系统 (3.665) 产生

$$\frac{c_2}{c_3} = -2\left(y_2 + \frac{1}{2}y^2\right) = \psi_1, \tag{3.666a}$$

$$\frac{c_1}{c_3} = 2\left(yy_2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}(y_1)^2\right) = \psi_2. \tag{3.666b}$$

因为 c_2/c_3 和 c_1/c_3 不是常数, 表达式 (3.666a,b) 给出 ODE (3.663) 的两个首次积分 ψ_1 和 ψ_2, 显然是函数无关的. 注意 ψ_1 和 ψ_2 是源于积分因子 (3.634a,b) 的首次积分的乘子 (参看 3.6.5 节).

第四个例子, 考虑三阶 ODE

$$y''' = 6x\frac{(y'')^3}{(y')^2} + 6\frac{(y'')^2}{y'},$$

可以用 (x, y, y_1, y_2, y_3) 空间上的曲面

$$y_3 = 6x(y_2)^3(y_1)^{-2} + 6(y_2)^2(y_1)^{-1} = f(x, y_1, y_2) \tag{3.667}$$

表示. 正如 3.5.2 节中所表明的, ODE(3.667) 拥有三个点对称和七个接触对称. 它也拥有三个二阶伴随对称, 正如 3.6.5 节中所表明的, 这三个伴随对称是积分因子. 这里, 通过定理 3.8.2.2(i), 利用三个所拥有的点对称

$$\hat{\eta}_1 = y, \quad \hat{\eta}_2 = xy_1, \quad \hat{\eta}_3 = 1 \tag{3.668}$$

和两个接触对称

$$\hat{\eta}_4 = (y_1)^{-1}, \tag{3.669a}$$

$$\hat{\eta}_5 = (y_1)^{-2}, \tag{3.669b}$$

可得 (3.667) 相应的首次积分. 注意, 因为 $f_{y_2} \neq 0$, 为了得到两个无关的 Wronski 行列式 (3.648), 我们至少需要四个对称. 由 (3.668) 和 (3.669a,b), 利用每三个对称构成集合, 我们得到 $5!/(3!2!) = 10$ 个 Wronski 行列式. 由这些行列式的相应比率 (3.655a) 可得 55 个首次积分, 可以证明其三个函数无关的首次积分. 特别地, 下面的函数是函数无关的:

$$\psi_1 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4)} = x(y_1)^2 + \frac{1}{3}(y_1)^2(y_2)^{-1}, \tag{3.670a}$$

$$\psi_2 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)}W = \frac{1}{2}x(y_1)^3 + \frac{1}{4}(y_1)^4(y_2)^{-1}, \tag{3.670b}$$

$$\psi_3 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_4)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4)} = \frac{3}{4}\frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_5)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)} = -\frac{2}{3}y + 2xy_1 + \frac{1}{3}(y_1)^2(y_2)^{-1}. \qquad (3.670\text{c})$$

由 45 个首次积分, 在那些与 (3.668) 和 (3.669a) 或 (3.699b) 有联系的首次积分中, 可以证明仅仅有两个是函数无关的. 因此, 需要两个接触对称 (3.669a,b) 来求得 (3.667) 的三个函数无关的首次积分.

最后, 考虑四阶 ODE

$$y^{(4)} = \frac{4}{3}\frac{(y''')^2}{y''},$$

可用 $(x, y, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 空间上的曲面

$$y_4 = \frac{4}{3}\frac{(y_3)^2}{y_2} = f(y_2, y_3) \qquad (3.671)$$

表示. 3.5.2 节中已证明 ODE(3.671) 拥有 12 个二阶对称. 类似地, 可以证明 ODE(3.671) 拥有 17 个二阶伴随对称 (参看习题 3.7.3). 因为 $f_{y_3} \neq 0$, 所以由定理 3.8.2.2 (i) 可知, 至少需要 5 个对称或伴随对称来求得两个无关的 Wronski 行列式 (3.648), 于是可得 ODE (3.671) 的首次积分. 这里, 通过利用 ODE(3.671) 拥有的对称中的 5 个

$$\hat{\eta}_1 = (y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_2 = x(y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_3 = y(y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_4 = xy(y_2)^{1/3}, \quad \hat{\eta}_5 = x^2(y_2)^{1/3} \qquad (3.672)$$

和伴随对称中的 5 个

$$\begin{aligned} &\omega_1 = (y_2)^{-4/3}, \quad \omega_2 = x(y_2)^{-4/3}, \quad \omega_3 = y(y_2)^{-4/3}, \\ &\omega_4 = y_1(y_2)^{-4/3}, \quad \omega_5 = xy_1(y_2)^{-4/3}, \end{aligned} \qquad (3.673)$$

可得它的 4 个函数无关的首次积分. 由 (3.672) , 通过用每四个对称构成的集合, 我们得到 5 个 Wronski 行列式, 进而可得由 (3.655a) 给定的 10 个首次积分. 类似地, 由 (3.673) 可得 10 个首次积分. 可以证明, 由每个首次积分集可得 (3.671) 的 4 个函数无关的首次积分. 特别地, 有

$$\psi_1 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)} = \frac{1}{2}\frac{W(\omega_1, \omega_3, \omega_4, \omega_5)}{W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)} = y_1 - \frac{3}{2}(y_2)^2(y_3)^{-1}, \qquad (3.674\text{a})$$

$$\psi_2 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_4, \hat{\eta}_5)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)} = \frac{W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5)}{W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)} = x + 3y_2(y_3)^{-1}, \qquad (3.674\text{b})$$

$$\psi_3 = \frac{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4, \hat{\eta}_5)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)} = \frac{W(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)}{W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)} = 2xy_1 - y + 3(y_1y_2 - x(y_2)^2)(y_3)^{-1}, \qquad (3.674\text{c})$$

$$\psi_4 = \frac{W(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_4, \hat{\eta}_5)}{W(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3, \hat{\eta}_5)} = \frac{W(\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5)W(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5)}{[W(\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5)]^2}$$

$$= -xy + x^2y_1 + \left(3xy_1y_2 - \frac{3}{2}x^2(y_2)^2 - 3yy_2\right)(y_3)^{-1}. \tag{3.674d}$$

通过包含 (3.672) 和 (3.673) 的 Wronski 行列式的乘积, 同样的首次积分也可以根据定理 3.8.2.2(ii) 得到. 则由 (3.674a~d) 可得 ODE(3.671) 的求积分 $\psi_i = \text{const} = c_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 有

$$y = \frac{c_4 - c_3x + c_1x^2}{x - c_2}. \tag{3.675}$$

3.8.3 自伴随 ODEs 的首次积分

这里, 我们简单地将 3.8.1 节和 3.8.2 节中的结论局限于伴随 ODEs. 对于由曲面 (3.645) 确定的 n 阶 ODE, 自伴随性的条件是 n 是偶数且 $f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1})$ 满足 (3.540b). 特别地, $f_{y_{n-1}} = 0$ 是必须的, 因而有

$$y_n = f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-2}), \quad n \geqslant 2. \tag{3.676}$$

对于自伴随 ODE(3.676), 伴随对称就是对称. 如果知道至少两个线性无关的对称, 那么对于拥有的每对对称 $\hat{\eta}_1(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 和 $\hat{\eta}_2(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$, 假如 $\partial\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)/\partial y_{n-1} \neq 0$, 由定理 3.8.1.1 得到 (3.676) 的如下首次积分

$$\psi(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^j(D^j\hat{\eta}_1)D^{n-j-1}\hat{\eta}_2 + \sum_{i=0}^{n-3}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{j+1}(D^j(\hat{\eta}_1 f_{y_{i+1}}))D^{i-j}\hat{\eta}_2. \tag{3.677}$$

我们强调 (3.677) 所用的对称不需要是变分对称.

现在假设 $\hat{\eta}_1(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 和 $\hat{\eta}_2(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$ 是自伴随 ODE(3.676) 的 ℓ 阶的变分对称. 则可证明 (参看习题 3.8.6) 首次积分 (3.677) 可由如下积分因子

$$\hat{\Lambda}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{i=0}^{\ell}((\hat{\eta}_1)_{y_i}D^i\hat{\eta}_2 - (\hat{\eta}_2)_{y_i}D^i\hat{\eta}_1) = \hat{X}_1^{(\ell)}\hat{\eta}_2 - \hat{X}_2^{(\ell)}\hat{\eta}_1 \tag{3.678}$$

得到, 其中 $\hat{X}_i = \hat{\eta}_i\dfrac{\partial}{\partial y}$ 是对应于 $\hat{\eta}_i, i = 1, 2$ 的无穷小生成元. 因为对于自伴随 ODE, 积分因子就是变分对称 (参看习题 3.7.4), 所以可知自伴随 ODE(3.676) 的积分因子 (3.678) 是 (3.676) 的对称. 特别地,

$$\hat{X} = \hat{\Lambda}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\frac{\partial}{\partial y} = [\hat{X}_1, \hat{X}_2] \tag{3.679}$$

等于对称 $\hat{\eta}_1$ 和 $\hat{\eta}_2$ 的交换对称. 从而, 如果 ψ_1 和 ψ_2 是由变分对称 $\hat{\eta}_1$ 和 $\hat{\eta}_2$ 给定的积分因子得到的首次积分, 则有

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \frac{1}{2}(\hat{X}_1^{(n-1)}\psi_2 - \hat{X}_2^{(n-1)}\psi_1). \tag{3.680}$$

现在假设自伴随 ODE (3.676) 拥有尺度对称

$$\hat{\eta}_S = py - qxy_1, \quad p = \text{const}, \quad q = \text{const}, \tag{3.681}$$

即 $x \to \alpha^q x, y \to \alpha^p y$. 如果已知 (3.676) 的 ℓ 阶的变分对称 $\hat{\eta}(x, y, y_1, \cdots, y_\ell)$, 且关于 (3.681) 的非临界尺度权重为 $s \neq (n-1)q - p$, 那么由 (3.677) 可得 ODE(3.676) 的相应首次积分的代数公式

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\hat{\eta}_S, \hat{\eta}) =& r^{-1}(p-(n-1)q)y_{n-1} - qxf)\hat{\eta} \\ &+ r^{-1}\sum_{i=0}^{n-2}((p-iq)y_i - qxy_{i+1}) \\ &\times \left((-1)^{n-i-1}D^{n-i-1}\hat{\eta} + \sum_{j=1}^{n-i-2}(-1)^j D^j(\hat{\eta} f_{y_{i+j}})\right),\end{aligned} \tag{3.682a}$$

式中

$$r = s + p - (n-1)q. \tag{3.682b}$$

最后, 因为对于自伴随 ODE (3.676), $f_{y_{n-1}} = 0$ 成立, 所以, 如果知道 n 个对称 $\hat{\eta}_i(x, y, y_1, \cdots, y_\ell), i = 1, 2, \cdots, n$, 且它们关于曲面是线性无关的, 则由定理 3.8.2.1 可得 (3.676) 的首次积分. 特别地, 假如 $\partial\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \cdots, \hat{\eta}_n)/\partial y_{n-1} \neq 0$, 则该首次积分为

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \cdots, \hat{\eta}_n) = \begin{vmatrix} \hat{\eta}_1 & \cdots & \hat{\eta}_n \\ D\hat{\eta}_1 & \cdots & D\hat{\eta}_n \\ \vdots & & \vdots \\ D^{n-1}\hat{\eta}_1 & \cdots & D^{n-1}\hat{\eta}_n \end{vmatrix}, \tag{3.683}$$

(3.683) 中所用的对称并不要求是变分对称.

对于 $n = 2$, 注意, 由 (3.683) 和 (3.677) 都可得同样的首次积分公式 $\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \hat{\eta}_1 D\hat{\eta}_2 - \hat{\eta}_2 D\hat{\eta}_1$. 然而对于 $n > 2$, 相应的公式是不同的.

现在考虑两个例子.

第一个例子, 考虑非线性无阻尼 Duffing 方程 (3.627), 即自伴随 ODE: $y'' + by + y^3 = 0$. 该二阶 ODE 拥有点对称 (3.628a). 在情况 $b = 0$ 条件下, 满足非线性 Duffing 方程

$$y'' + y^3 = 0, \tag{3.684}$$

拥有由尺度对称 $x \to \alpha x, y \to \alpha^{-1} y$ 表示的第二个点对称. 现在由两个所拥有的点对称

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \quad \hat{\eta}_2 = y + xy_1, \tag{3.685}$$

应用 Wronski 行列式 (3.683) 求得自伴随 ODE (3.684) 的首次积分为

$$\hat{\psi}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 2(y_1)^2 + y^4. \tag{3.686}$$

由变分点对称给定的相应的积分因子为

$$\hat{\Lambda}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 4y_1 = 4\hat{\eta}_1. \tag{3.687}$$

从而, 由尺度公式 (3.682a,b), 首次积分 (3.686) 也可以直接根据 $\hat{\eta}_1$ 来求得, 因为 (3.687) 的尺度权重 $s = -2$ 是非临界的 (即 $q = 1, p = -1$, 因此 $r = -4 \neq 0$). 注意首次积分 (3.686) 是非线性振荡器 (3.684) 的能量的乘子.

作为最后例子, 考虑四阶非线性 ODE (Sheftel, 1997):

$$y^{(4)} = y^{-5/3}. \tag{3.688}$$

它的点对称为 (参看习题 3.5.7)

$$\hat{\eta}_1 = y_1, \tag{3.689a}$$

$$\hat{\eta}_2 = 3y - 2xy_1, \tag{3.689b}$$

$$\hat{\eta}_3 = 3xy - x^2 y_1. \tag{3.689c}$$

因而, 并不具有足够个数的对称来应用首次积分 Wronski 行列式公式 (3.683). 但是, 通过对称 (3.689a~c) 构成的对, 我们能够由首次积分公式 (3.677) 得到三个函数无关的首次积分

$$\hat{\psi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 2y_1y_3 - (y_2)^2 + 3y^{-2/3}, \tag{3.690a}$$

$$\hat{\psi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3) = (2xy_1 - 3y)y_3 + y_1y_2 - x(y_2)^2 + 3xy^{-2/3}, \tag{3.690b}$$

$$\hat{\psi}_3(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) = (-2x^2y_1 + 6xy)y_3 - 6yy_2 - 2xy_1y_2 + x^2(y_2)^2 + 4(y_1)^2 - 3x^2y^{-2/3}, \tag{3.690c}$$

且相应的积分因子为

$$\hat{\Lambda}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 2y_1 = 2\hat{\eta}_1, \tag{3.691a}$$

$$\hat{\Lambda}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_3) = 2xy_1 - 3y = -\hat{\eta}_2, \tag{3.691b}$$

$$\hat{\Lambda}_3(\hat{\eta}_2, \hat{\eta}_3) = -2x^2y_1 + 6xy = 2\hat{\eta}_3. \tag{3.691c}$$

因此, 包括尺度对称的三个点对称是 ODE (3.688) 的变分对称. 注意, 两个首次积分 (3.690a,b) 也能根据 (3.689a,b) 用尺度公式 (3.682a) 来求得. 三个点对称 (3.689a~c) 的交换子 (3.679) 为

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = 2\hat{X}_1, \quad [\hat{X}_1, \hat{X}_3] = -\hat{X}_2, \quad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = 2\hat{X}_3,$$

这与 (3.678) 和 (3.691a~c) 是一致的.

最后由 (3.690a~c) 可得三个求积分 $\psi_i = \text{const} = c_i, i = 1,2,3$, 其将 ODE (3.688) 约化为如下的一阶 ODE

$$\frac{1}{9}(x^2c_1 - 2xc_2 - c_3)(y_1)^2 - \frac{2}{3}(xc_1 - c_2)yy_1 + c_1y^2 - 3y^{4/3} + \frac{1}{36}(x^2c_1 - 2xc_2 - c_3)^2 = 0. \tag{3.692}$$

习 题 3.8

1. 考虑谐振荡方程 $y'' + \nu^2 y = 0, \nu = \text{const}$. 利用尺度公式 (3.682a,b) 和 Wronski 公式 (3.683), 由它所拥有的点对称求首次积分.

2. 考虑三阶 ODE$y''' = y^{-2}(y')^3$, 拥有平移对称 $x \to x + \varepsilon, y \to y$ 和尺度对称 $x \to \alpha x, y \to \beta y$. 用 Wronski 公式 (3.654) 和这三个拥有的点对称求首次积分和对应的积分因子.

3. 考虑三阶 ODE(3.667), 拥有尺度对称 $x \to \alpha x, y \to \beta y$.

(a) 用尺度公式 (3.626), 由所拥有的二阶伴随对称 (3.513) 和 (3.515) 求首次积分. 分别从 x 和 y 尺度变换作用小不变性比较所得到的结果.

(b) 对 (3.667) 的二阶伴随对称 (3.513) 和 (3.515) 进行分类, 看哪些具有关于 x 和 y 尺度变换的非临界尺度维. 确定是否 x 和 y 尺度变换的组合使得所有二阶伴随对称 (3.513) 和 (3.515) 具有非临界尺度维.

4. 考虑四阶 ODE(3.671), 拥有尺度对称 $x \to \alpha x, y \to \beta y$.

(a) 用关于 x 和 y 尺度的尺度公式 (3.626), 从所拥有的二阶伴随对称 (参看习题 3.7.3), 求首次积分.

(b) 用 Wronski 公式 (3.655a,b), 由所拥有的二阶对称和伴随对称求首次积分.

(c) 从尺度公式和 Wronski 公式, 比较所获得的结果.

5. 考虑四阶波速 ODE (3.639). 用关于如下对称的 Wronski 公式 (3.655a,b), 求首次积分:

(a) 一阶和二阶对称 (参看 3.5.2 节);

(b) 一阶和二阶伴随对称 (参看 3.7.3 节).

6. 证明: 关于一对变分对称的首次积分公式 (3.677) 约化为表达式 (3.680). 证明相应的积分因子由换位子表达式 (3.678), (3.679) 给定.

7. 证明引理 3.8.2.2.

8. 证明定理 3.8.2.2.

9. 考虑首次积分的另一代数公式, 其应用于特殊的 n 阶 ODEs

$$y_n = f(x, y_1, \cdots, y_{n-1}), \quad f_y = 0, \tag{3.693}$$

即 f 不依赖 y. 对于 (3.693), 伴随对称确定方程 (3.543) 为

$$D\psi = 0, \quad \psi = (-1)^n D^{n-1}\omega - \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i D^{i-1}(f_{y_i}\omega). \tag{3.694}$$

因此, 由 (3.694) 可得 (3.693) 的首次积分, 假如 $\psi_{y_{n-1}} \neq 0$.

(a) 通过利用所拥有的二阶伴随对称 (参看 3.7.3 节), 计算由 (3.694) 给定的三阶 ODE(3.506) 的首次积分.

(b) 通过利用由习题 3.7.3 确定的伴随对称, 计算由 (3.694) 给定的四阶 ODE (3.612) 的首次积分.

3.9 应用于边值问题

本节将说明如何将阶的约化应用于 ODE 的边值问题. 因为对于给定的 ODE 的所有解, 阶的约化都成立, 由此可将给定 ODE 的边值问题映射成约化阶 ODE 的边值问题. 我们将用一个例子来说明.

再次考虑 1.3.1 节中所讨论的平直金属板的 Prandtl-Blasius 问题. 边值问题 (1.62a~e) 约化为求解 Blasius 方程

$$y''' + \frac{1}{2}yy'' = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{3.695a}$$

且边值条件为

$$y(0) = y'(0) = 0, \tag{3.695b}$$

$$y'(\infty) = 1. \tag{3.695c}$$

我们希望确定 $\sigma = y''(0)$ 的值.

在 3.4.2 节中, 在 2 参数 Lie 点变换群 (3.139a,b) 作用下, (3.695a) 的不变性将该方程约化为一阶 ODE

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} = \frac{V}{U}\left[\frac{\frac{1}{2} + V + U}{2U - V}\right], \tag{3.696}$$

以及求积分 (3.171) 和 (3.172), 式中

$$V = \frac{y''}{yy'}, \quad U = \frac{y'}{y^2}.$$

令 $V = \phi(U; C_1)$ 是 (3.696) 的通解. 考虑辅助于 (3.696) 的 UV 平面中的相平面. 对于边值问题 (3.695a~c) 的解曲线上的某点, 一定有 $y' > 0$. 则由相平面图

表可知, 沿边值问题 (3.695a~c) 的整个解曲线总有 $U>0$. 从而 $y>0, y'>0$, 当 $0<x<\infty$ 时. 那么, 沿着 (3.695a~c) 的解曲线的某点, 总有 $y''>0$. 因而, 边值问题 (3.695a~c) 的解曲线一定完全位于第一象限 (参看图 3.3). 因此可知, 沿着解曲线有 $y>0, y'>0, y''>0$, 当 $0<x<\infty$ 时. 从而 $y''(0)=\sigma>0$. 则

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}=\frac{y'}{y}[V-2U]\gtrless 0, \quad \text{如果 } V\gtrless 2U$$

导致图 3.3 中箭头所示的 x 增加的方向. 因此, 当 $x\to\infty, (U,V)\to(0,0)$. 当 $x\to 0$ 时, 存在三种情况 $(U,V)\to(0,\infty); U\to\infty$ 且 $V\ll U$; $(U,V)\to(\infty,\infty)$ 且 $V=O(U)$. 根据边界条件 (3.695b,c), 我们检验每一种情况.

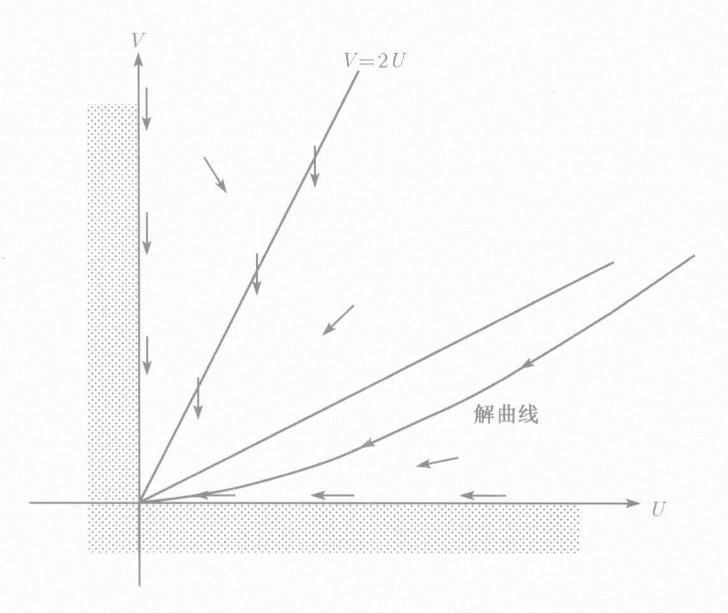


图 3.3

情况 I. $(U,V)\to(0,\infty)$, 当 $x\to 0$ 时.

这里 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}U\sim -V/U$, 当 $x\to 0$ 时. 则 $y''/y^3=VU\sim \text{const}=C_1$, 当 $x\to 0$ 时, 这是不可能的, 若 $y''(0)=\sigma=\text{const}\neq 0$.

情况 II. $U\to\infty$ 且 $V\ll U$, 当 $x\to 0$ 时.

这里 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}U\sim V/2U$, 当 $x\to 0$ 时. 则 $y''/(y')^{3/2}\sim \text{const}=C_2$ 当 $x\to 0$ 时, 这又是不可能的.

因此, 下面的情况一定成立:

情况 III. $(U,V)\to(\infty,\infty)$ 且 $V=O(U)$, 当 $x\to 0$ 时.

由 ODE(3.696) 可知, 这个解一定位于一条分界线 (异常的路径) (参看 3.10 节)

$$V \sim \frac{1}{2}U, \quad 当 x \to 0 时.$$

即 $y'' \sim \frac{1}{2}(y')^2/y$, 当 $x \to 0$ 时. 因此 ODE(3.170) 变为

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} \sim -\frac{1}{3r}, \quad 当 x \to 0 时.$$

因此可得

$$\frac{(y')^2}{y} \sim \text{const} = C_\infty, \quad 当 x \to 0^+ 时.$$

从而 $y''(0) = \frac{1}{2}C_\infty$.

当 $x \to \infty$ 时, 由边界条件 (3.695c) 可得 $(U, V) \to (0, 0)$ 且 $V \ll U$. 故当 $x \to \infty$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}U} \sim \frac{V}{4U^2},$$

使得对于某常数 d_0, 有

$$V \sim d_0 \mathrm{e}^{-1/4U}.$$

因此由 ODE (3.170) 可得 $y' = s = \text{const} = C_0$, 当 $x \to \infty$ 时. 正如 1.3.1 节中所表明的, 可知 $\sigma = C_\infty/2(C_0)^{3/2}$.

当 $U \to \infty$ 时, 边值问题 (3.695a~c) 的解现在可以由异常路径来求得, 那么当 $U \to 0$ 时, 积分可得 $V \sim d_0 \mathrm{e}^{-1/4U}$, 最后可确定常 C_0 和 C_∞. 故有 $\sigma = C_\infty/2(C_0)^{3/2}$. 详细的内容参看文献 (Dresner, 1983).

应用到边值问题的进一步例子, 参看文献 (Bluma, Cole, 1974; Dresner, 1983, 1999).

习 题 3.9

1. 考虑非线性扩散方程

$$u_t = (uu_x)_x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty,$$

且边界条件为

$$u(x, 0) = 0, \quad x > 0,$$
$$u(0, t) = 1, \quad t > 0.$$

根据尺度变换作用下它的不变性, 可知它的解具有形式 $u = y(\eta)$, 其中 $\eta = x/\sqrt{t}$.

(a) 推导 $y(\eta)$ 满足的二阶 ODE 以及相应的边界条件.

(b) 证明该 ODE 拥有单参数 Lie 点变换群. 将该 ODE 约化为一阶 ODE 和求积分.

(c) 研究该一阶 ODE 的相平面, 并且讨论由哪一种路径可得所引起的边值问题的解.

(d) 绘出 $u(x,t) = y(\eta)$ 的图形.

2. 考虑 Thomas-Fermi 方程

$$y'' = x^{-1/2}y^{3/2}. \tag{3.697}$$

(a) 求 (3.697) 拥有的尺度对称.

(b) 用对称将 (3.697) 约化为一阶 ODE.

(c) 求相平面中对应于物理意义的边界条件

$$y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0$$

的曲线. 关于该问题的全面讨论, 参看文献 (Bluma, Cole, 1974; Dresner, 1999).

3. 在压力负荷下, 膜的轴对称变形的几何非线性理论中, 可以获得 ODE

$$(x^3y')' = x^3\nu(x) - \frac{x^3}{y^2}q(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3.698}$$

其中 y 是与最初形状的偏差, x 是径向球形坐标, $\nu(x)$ 是形状函数 $\nu(x) =$ const 是一个球体, $q(x)$ 是负荷函数且对于统一的压强 $q(x) \sim x^4$. 假设膜是球形的且在 $x = 0$ 附近负荷常压强. 边界条件为

$$y(0) \text{ 是有限的 (坐标轴上正则)}, \tag{3.699a}$$

$$y(1) = 0 \text{ (边界上固定的隔膜)}. \tag{3.699b}$$

(a) 令 $\nu(x)$ 和 $q(x)$ 具有被要求的性质, 且解满足正则条件, 证明: (3.698) 拥有单参数 Lie 点变换群, 当且仅当 $\nu(x)$ 和 $q(x)$ 具有形式

$$\nu(x) = \nu_0(1+\alpha x^2)^{-3}, \quad q(x) = q_0x^4(1+\alpha x^2)^{-5}, \tag{3.700}$$

其中 α, ν_0, q_0 是任意常数.

(b) 证明: 当 (3.698) 的系数满足 (3.700) 时, 它所有的点对称的无穷小生成元为

$$X = (x+\alpha x^3)\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.701}$$

(c) 相应地, 将 (3.698) 约化为一阶 ODE, 并且分离出相平面上的特殊轨线满足边值问题 (3.698), (3.699a,b).

该问题的完全的讨论, 参看文献 (Bluma, Cole, 1974).

3.10 不 变 解

考虑 n 阶 ODE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \tag{3.702}$$

或等价于曲面 $y_n = f(x, y, y_1, \cdots, y_n)$, 并且假设它拥有单参数 Lie 点变换 (点对称) 且无穷小生成元为

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.703}$$

定义 3.10.1　$y = \phi(x)$ 是点变换 (3.704) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性所得到的不变解, 当且仅当

(i) $y = \phi(x)$ 是 (3.703) 的不变曲线, 即 $X(y - \phi(x)) = 0$, 当 $y = \phi(x)$ 时;

(ii) $y = \phi(x)$ 满足 (3.702).

由此可知, $y = \phi(x)$ 是点变换 (3.704) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性所得到的不变解, 当且仅当 $y = \phi(x)$ 满足

(i) $\xi(x, \phi(x))\phi'(x) = \eta(x, \phi(x))$; (3.704a)

(ii) $\phi^{(n)}(x) = f(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{(n-1)}(x))$. (3.704b)

更一般地, $\Phi(x, y) = 0$ 定义了在点变换 (3.704) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性所得到的不变解, 当且仅当

(i) $\Phi(x, y) = 0$ 是 (3.703) 的不变曲线, 即 $X\Phi = 0$, 当 $\Phi = 0$ 时;

(ii) $\Phi(x, y) = 0$ 满足 (3.702).

特别地, 这里 (i) 和 (ii) 等价于

(i) $\Phi(x, y) = 0$ 是一阶 ODE: $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$ 的一个解;

(ii) $\Phi(x, y) = 0$ 是 ODE: $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 的一个解.

求 ODE(3.702) 的不变解的明显的程序源于点对称 (3.703) 作用下它的不变性, 首先是试图求解 ODE: $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$, 求得它的通解 $g(x, y; C) = 0$. 如果能够做到这一点, 那么 C 的值确定不变解, 如果存在, 则可由将该通解代入给定的 ODE (3.702) 来确定. 任意 $C = C^*$ 的值确定 ODE (3.702) 的不变解 $\Phi(x, y) = g(x, y; C^*) = 0$, 由 (3.703) 作用下的不变性得到.

现在提出另外更好的程序, 以避免确定 $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$ 的通解. 特别地, 通常为了求源于点对称 (3.703) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性导致的不变解, 并不一定求 ODE: $y' = \eta(x, y)/\xi(x, y)$ 或任意其他 ODE.

定理 3.10.1 (Bluman, 1990c)　假设 n 阶 ODE (3.702) 拥有点对称 (3.703)且 $\xi \neq 0$. 令 $Y = \dfrac{\partial}{\partial x} + \Psi(x, y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, 其中 $\Psi(x, y) \equiv \eta(x, y)/\xi(x, y)$. 考虑如下定义的

函数:

$$Q(x,y) = \left(y_n - f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})\right)\Big|_{y_k=Y^{k-1}\Psi} = Y^{n-1}\Psi \\ - f(x,y,\Psi,Y\Psi,\cdots,Y^{n-2}\Psi). \tag{3.705}$$

关于代数方程 $Q(x,y)=0$, 存在三种情况:

(i) $Q(x,y)=0$ 并没有定义 xy 平面上的曲线;

(ii) 对所有 x 和 y 的值, $Q(x,y)=0$ 恒成立;

(iii) $Q(x,y)=0$ 定义 xy 平面上的曲线.

在情况 (i) 中, ODE (3.702) 没有源于点对称 (3.703) 作用下由它的不变性得到的解.

在情况 (ii) 中, ODE $y'=\eta(x,y)/\xi(x,y)$ 的任意解都是源于点对称 (3.703) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性得到的不变解.

在情况 (iii) 中, 源于点对称 (3.703) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性得到的不变解是满足 $Q(x,y)=0$ 的曲线, 反之, 任一满足 $Q(x,y)=0$ 的曲线是源于 (3.703) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性所得到的不变解.

证明 如果 $y_1=y'=\eta(x,y)/\xi(x,y)=\Psi(x,y)$, 那么对于 $k=1,2,\cdots,n$, 可以连续地获得 $y_k=y^{(k)}=\mathrm{d}^{k-1}y_1/\mathrm{d}x^{k-1}=Y^{k-1}\Psi$, 从而, 源于点对称 (3.703) 作用下由 ODE (3.702) 的不变性可得的它的任意不变解一定满足代数方程

$$Q(x,y)=0.$$

由此立即可推的如下结论:

(i) 如果 $Q(x,y)=0$ 并没有定义 xy 平面上的曲线, 那么 ODE (3.702) 没有源于点对称 (3.703) 作用下它的不变性导致的解;

(ii) 如果对所有 x, y, 有 $Q(x,y)=0$, 那么 ODE $y'=\eta(x,y)/\xi(x,y)$ 的任意解都是源于点对称 (3.703) 作用下 ODE (3.702) 的不变性导致的不变解.

情况 (iii) 中考虑满足 $Q(x,y)=0$ 的任意曲线. 该曲线是 ODE (3.702) 的不变解, 其源于点对称 (3.703) 作用下的不变性, 当且仅当它的微分结果

$$Q_x+Q_yy'=0$$

满足 ODE$y'=\eta(x,y)/\xi(x,y)$, 这等价于

$$YQ=0, \quad \text{当 } Q(x,y)=0 \text{ 时}. \tag{3.706}$$

我们现在证明 (3.706) 对由 $Q(x,y)=0$ 定义的任意曲线都成立.

因为 ODE (3.702) 拥有点对称 (3.703), 由此可知, 点对称确定方程

$$\eta^{(n)}=\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\eta^{(1)}\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots+\eta^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}} \tag{3.707a}$$

关于满足

$$y_n = f(x, y, y_1, \cdots, y_{n-1}) \tag{3.707b}$$

的 $x, y, y_1, \cdots, y_n$ 的所有值一定成立, 式中 $\eta^{(k)} k = 1, 2, \cdots, n$ 由 (2.100a,b) 确定. 给定 x 和 y 的任意值, 由 (3.705) 可知, 如果 $Q(x, y) = 0$, 则 $x, y, y_k = Y^{k-1}\Psi (k = 1, 2, \cdots, n)$ 满足 (3.707b). 从而可知 $Y = D$, 其中 D 是全导数算子 (2.96). 因此, (3.707a) 中, 有

$$\eta^{(1)} = D\eta - y_1 D\xi = Y\eta - \Psi Y\xi = Y(\xi\Psi) - \Psi Y\xi = \xi Y\Psi$$

和递归公式

$$\eta^{(k+1)} = D\eta^{(k)} - y_{k+1} D\xi = \xi Y^{k+1}\Psi, \quad k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

故对于满足 $Q(x, y) = 0$ 的任意曲线, 由在 $y_k = Y^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 处点对称确定方程 (3.707a) 得到

$$Y^n\Psi = \frac{\partial f}{\partial x} + \Psi\frac{\partial f}{\partial y} + (Y\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + (Y^{(n-1)}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}. \tag{3.708}$$

另一方面, 将 Y 应用于 (3.705), 可得 $y_k = Y^{k-1}\Psi$, $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 处的结果为

$$YQ \equiv Y^n\Psi - \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \Psi\frac{\partial f}{\partial y} + (Y\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + (Y^{n-1}\Psi)\frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}\right].$$

因而, 由 (3.708) 可知

$$YQ = 0, \quad \text{当 } Q(x, y) = 0 \text{ 时}.$$

□

对于源于 ODE(3.702) 的点对称 (3.703) 且 $\xi \equiv 0$ 的不变解, 存在类似的结果.

定理 3.10.2　假设 n 阶 ODE (3.702) 拥有点对称 (3.703) 且 $\xi \equiv 0$. 考虑代数方程 $\eta(x, y) = 0$. 则存在两种情况:

(i) $\eta(x, y) = 0$. 并没定义 xy 平面上的曲线;

(ii) $\eta(x, y) = 0$. 定义了 xy 平面上的曲线.

情况 (i) 中, ODE (3.702) 不具有源于 (3.703) 作用下它的不变性导致的不变解.

情况 (ii) 中, 曲线 $y = \phi(x)$ 是源于 (3.703) 作用下 ODE (3.702) 的不变性导致的不变解, 当且仅当该曲线满足 $\eta(x, y) = 0$.

证明留作习题 3.10.13.

作为第一个例子, 考虑 n 阶常系数线性齐次 ODE

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \tag{3.709}$$

由无穷小生成元

$$X=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta y\frac{\partial}{\partial y}$$

得到的关于 x 的平移对称和 y 的尺度对称作用下 (3.709) 的不变性, 可得它的所有解, 其中 α,β 是任意常数. 令 $\lambda=\beta/\alpha$, 其中 $\alpha\neq 0$. 相应的不变解 $y=\phi(x)$ 满足

$$y'=\frac{\eta}{\xi}=\lambda y. \tag{3.710}$$

因此, 有 $\Psi=\lambda y, Y=\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}, y^{(k)}=Y^{k-1}\Psi=\lambda^k y$. 将 (3.710) 代入 ODE (3.709), 得

$$Q(x,y)=[\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n]y=0.$$

这就得到了著名的特征多项式方程

$$p(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0, \tag{3.711}$$

因此可得 ODE (3.709) 的确定解 $y=C\mathrm{e}^{\lambda x}, C=\text{const}$. 这里, 这些解是源于$X=\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\beta y\frac{\partial}{\partial y}$ 作用下不变性导致的给定 ODE (3.709) 的不变解, 即 $p(\lambda)=0$ 满足 $[X(y-C\mathrm{e}^{\lambda x})]\big|_{y=C\mathrm{e}^{\lambda x}}=0$. 根据定理 3.10.1, 当 λ 是 $p(\lambda)=0$ 的根时, 存在情况 (ii); 当 λ 不是 $p(\lambda)=0$ 的根时, 存在情况 (iii). 在情况 (ii) 中, 不变解是 ODE(3.710) 的具有形式 $y=C\mathrm{e}^{\lambda x}$ 的解, C 是任意常数.

第二个例子, 再次考虑 Blasius 方程

$$y'''+\frac{1}{2}yy''=0, \tag{3.712}$$

其拥有对称

$$X=(\alpha x+\beta)\frac{\partial}{\partial x}-\alpha y\frac{\partial}{\partial y},$$

式中 α,β 为任意常数. 当 $\alpha=0$ 时, 相应的不变解为 $y=\text{const}=C$, C 是任意常数. 当 $\alpha\neq 0$, 令 $\lambda=\beta/\alpha$.

首先利用明显的程序来求得不变解. 则不变解 $y=\phi(x)$ 满足 ODE

$$y'=\frac{\eta}{\xi}=-\frac{y}{x+\lambda}, \tag{3.713a}$$

有通解

$$y=\frac{C}{x+\lambda}, \tag{3.713b}$$

C 是任意常数. 将 (3.713b) 代入 ODE (3.712), 可得 $C=0$ 或者 $C=6$, 于是得到 Blasius 方程 (3.712) 的相应的不变解

$$y=\phi_1(x)=0,\quad y=\phi_2(x)=\frac{6}{x+\lambda},\tag{3.714}$$

λ 是任意常数.

现在利用定理 3.10.1 中的程序来求得不变解 (3.714). 这里

$$Y=\frac{\partial}{\partial x}-\frac{y}{x+\lambda}\frac{\partial}{\partial y},\quad \Psi=-\frac{y}{x+\lambda},\quad Y\Psi=\frac{2y}{(x+\lambda)^2},\quad Y^2\Psi=-\frac{6y}{(x+\lambda)^3}.$$

则

$$Q(x,y)=\frac{y^2}{(x+\lambda)^2}-\frac{6y}{(x+\lambda)^3}.$$

从而, 由 $Q(x,y)=0$ 可得不变解 (3.714).

对于这两个例子, 两种途径的计算量存在微小的差异. 然而, 一般地, 定理 3.10.1 中的程序更清晰些, 因为它避免 ODE: $y'=\eta/\xi$ 的不必要的积分.

一阶 ODE 的不变解是特别有意义的.

一阶 ODEs 的不变解: 分界线和包络

对于一阶 ODE

$$y'=f(x,y),\tag{3.715}$$

仅仅考虑源于 (3.715) 拥有的非平凡无穷小生成元 (3.703) 作用下不变性导致的不变解, 这里 $\eta(x,y)/\xi(x,y)\neq f(x,y)$, 即关于 x, y 的所有值, $Q(x,y)=\eta(x,y)/\xi(x,y)-f(x,y)\neq 0$. 这可以由定理 3.10.1 清晰地得到, 因为如果 $\eta(x,y)/\xi(x,y)\equiv f(x,y)$, 则 $Q(x,y)\equiv 0$, 从而平凡地 ODE (3.715) 的所有解都是不变解.

考虑 xy 平面 (相平面) 上 ODE (3.715) 的所有解曲线的集合. 该集合或许包含分界线 (异常路径), 例如极限环, 其是关于解曲线邻域表现拓扑异常的解曲线, 即拓扑 “分离” 不同的解曲线 (Lefschetz, 1963). 通过下面的讨论, 我们说明, 关于任意所拥有的 Lie 变换群, 分界线是 ODE(3.715) 的不变解.

通过参数 (ε), ODE (3.715) 所拥有的单参数 (ε) 的 Lie 变换群可以将 (3.715) 的解连续地变化为它的另一个解. 但是 ODE (3.715) 的两个拓扑不同的解并不能连续地变形为另一个, 因此并不能在群作用下映射成另一解. 从而由此可知, 关于所有拥有的 Lie 变换群, 分界线一定是 ODE (3.715) 的不变解.

类似于分界线的讨论可知, 一阶 ODE

$$F(x,y,y')=0\tag{3.716}$$

的任意奇异解, 特别是任意包络解 (如果存在) 一定是关于任意所拥有 Lie 变换群的不变解. 如果 ODE (3.716) 拥有单参数 Lie 变换群, 且无穷小生成元为$X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, 则有

$$X^{(1)}F = \xi F_x + \eta F_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y(y')^2]F_{y'} = 0, \quad 当 \ F(x,y,y') = 0 \ 时$$

和

$$F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\right) \neq 0, \quad 对任意 \ x, y \ 都成立.$$

通过定理 3.10.1 的简单的拓展可知, 由$X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$ 作用下不变性导致的 ODE (3.716) 的不变解是如下代数方程

$$F\left(x, y, \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}\right) = 0 \tag{3.717}$$

所定义的曲线. 因而对于 (3.761) 拥有的任意点对称$X = \xi(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$, ODE (3.716) 满足代数方程 (3.717).

作为第一个例子, 考虑一阶 ODE

$$y' = y^2, \tag{3.718}$$

其明显拥有对称

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}.$$

由 X_1 作用下它的不变性可知, ODE (3.718) 的分界解 $y = \phi(x)$ 必须满足

$$Q(x,y) = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} - f(x,y) = -y^2 = 0.$$

因此, 唯一可能的分界解为 $y = 0$.

由 X_2 作用下它的不变性可知, ODE (3.718) 的分界解 $y = \phi(x)$ 必须满足

$$Q(x,y) = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} - f(x,y) = -\left(\frac{y}{x} + y^2\right) = -y\left(y + \frac{1}{x}\right) = 0,$$

其导致可能的分界解 $y = 0$ 和 $y = -1/x$. 因为 $y = -1/x$ 不是 (3.718) 的源于 X_1 作用下它的不变性导致的不变解, 所以它不是 ODE (3.718) 的分界. 该解是 ODE (3.718) 的源于当 $C = 0$ 时的通解 $y = -1/(x + C)$, $C = \text{const.}$ 的一个特解图 3.4 展示了该解曲线. 显然 $y = 0$ 是分界.

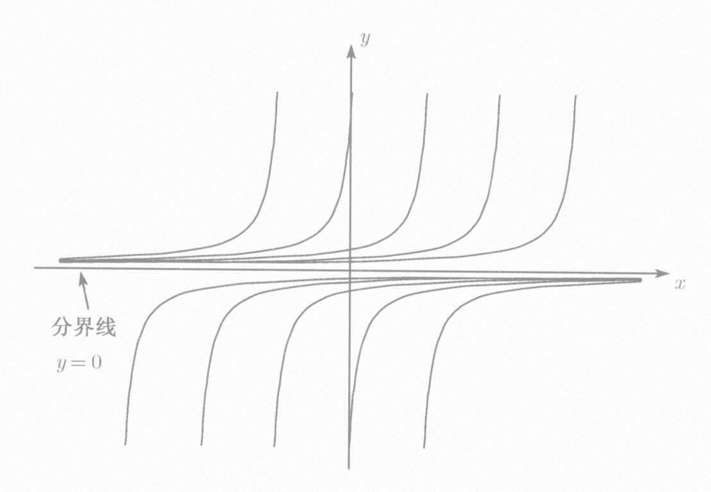


图 3.4 $y' = y^2$ 的解曲线

作为第二个例子, 考虑一阶 ODE

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2+y^2}+y(x^2+y^2-1)}{x(x^2+y^2-1)-y\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{3.719}$$

其拥有旋转群

$$X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.720}$$

(3.720) 的不变曲线是圆周

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{3.721}$$

因而, ODE (3.719) 的分界一定满足 (3.721). 将 (3.721) 代入 ODE (3.719), 可得

$$-\frac{x}{y} = \frac{xc+y(c^2-1)}{x(c^2-1)-yc},$$

使得 $c = 1$. 从而, 唯一可能的分界是圆周

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3.722}$$

可以证明圆周 (3.722) 的确是 ODE (3.719) 的一个极限环. 图 3.5 显示了这种情况.

第三个例子, 考虑 Clairaut 方程

$$y = xy' + \frac{m}{y'}, \tag{3.723}$$

其中 m 是常数.

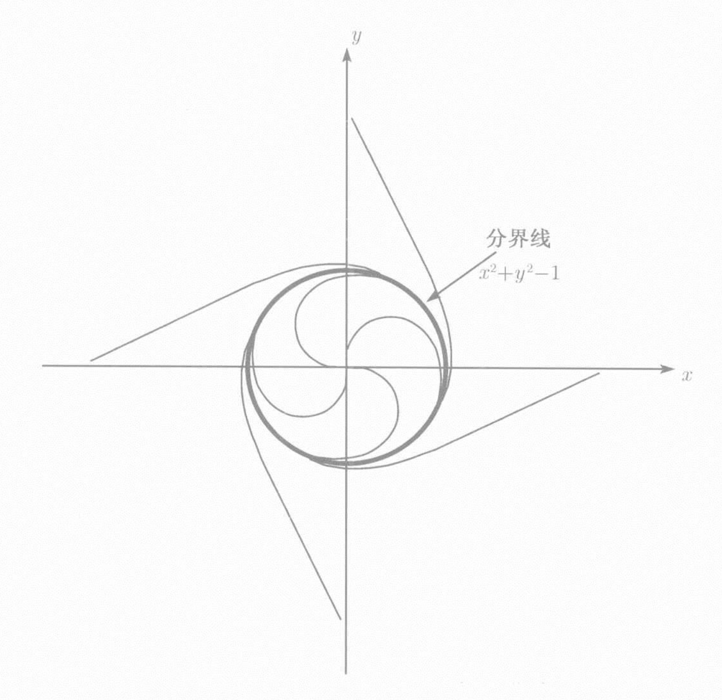


图 3.5 ODE (3.719) 的解曲线

清楚地, ODE (3.732) 拥有尺度群

$$X = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{3.724}$$

ODE (3.723) 的包络解一定满足代数方程 (3.717) 且 $\eta/\xi = y/2x$, 即

$$y = \frac{1}{2}y + \frac{2mx}{y},$$

所以有

$$y^2 = 4mx. \tag{3.725}$$

因此, $y^2 = 4mx$ 是 ODE (3.723) 的唯一可能的包络解.

由 (3.724) 作用下 ODE (3.723) 的不变性可得它的通解

$$y = cx + \frac{m}{c}, \tag{3.726}$$

其中 c 是任意常数. 显然, (3.725) 定义的抛物线是直线族 (3.726) 的包络. 图 3.6 显示了 $m = 1$ 时的情况.

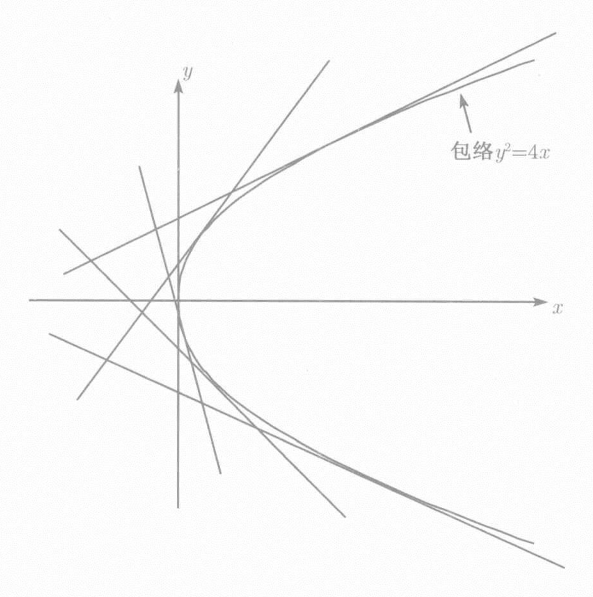


图 3.6　m=1 时 ODE (3.723) 特殊解曲线

习　题　3.10

1. (a) 假设 $\lambda = r$ 是特征多项式方程 (3.711) 的重根.

(i) 证明对任意的常数 α, β, γ, (3.709) 拥有对称 $X = \alpha\dfrac{\partial}{\partial x}+(\beta y+\gamma \mathrm{e}^{rx})\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(ii) 求 (3.709) 的相应的不变解.

(b) 如果 $\lambda = r$ 是特征多项式方程 (3.711) 的 k 重根, 那么情况如何?

2. 考虑 Euler 方程

$$x^2y'' + Axy' + By = 0, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const}.$$

根据不变解, 求它的通解. 注意, 对任意常数 α, β, Euler 方程拥有尺度对称

$$X = \alpha x\frac{\partial}{\partial x} + \beta y\frac{\partial}{\partial y}.$$

3. 求对应于 3 参数 Lie 点变换群 (3.195a,b) 作用下 (3.194) 不变性的所有不变解.

4. 求 (3.179) 的通解, 并且给出解曲线的一些轮廓.

5. 利用 (3.724) 作用下 (3.723) 的不变性, 推导它的通解 (3.726).

6. 求一阶 ODE$y' = f(x,y)$ 的必要条件, 使得它拥有旋转群 $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$ 以及极限环 (分界线) $x^2 + y^2 = 1$.

7. 考虑 ODE

$$y' = A\frac{y}{x}, \quad A = \text{const} \neq 0. \tag{3.727}$$

(a) 求源于如下对称作用下 (3.727) 的不变性的不变解

(i) $X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x}$;

(ii) $X_2 = y\dfrac{\partial}{\partial y}$;

(iii) $X_3 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

(b) 确定 (3.727) 的分界线.

(c) 作出 (3.727) 的典型解曲线的图像.

8. 利用 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ 作用下 ODE $y' = x/y$ 的不变性, 求它的分界线.

9. 求 ODE

$$y' = \frac{y(y-2x)}{x(x-2y)}$$

的分界线, 并且画出典型解曲线的轮廓.

10. 证明：ODE

$$y' = -\frac{x^3}{y}$$

不具有分界线, 不能显式地求解.

11. 考虑 ODE

$$y + \frac{2}{3}(y')^3 - (x + (y')^2) = 0. \tag{3.728}$$

(a) 求 (3.728) 拥有的单参数 Lie 变换群.

(b) 作出 (3.728) 的典型解曲线的图形.

(c) 求 (3.728) 的解曲线的包络.

12. 对于 Clairaut ODE

$$y = xy' + (1 + (y')^2)^{1/2}.$$

做同样的习题 3.10.11.

13. 证明定理 3.10.2.

3.11 讨　论

本章中, 我们已经证明了如下的计算方法:

(1) 用 Lie 点变换群作用下不变性构造给定 ODE 的解;

(2) 用单参数局部 (点, 接触, 高阶) 变换群作用下不变性约化给定 ODE 的阶;

(3) 通过求解源于 Lie 算法的确定方程, 求给定 ODE 拥有的局部变换的无穷小生成元;

(4) 求最一般的 n 阶 ODE, 使得它们拥有给定 Lie 变换群;

(5) 用首次积分约化给定 ODE 的阶;

(6) 通过给定 ODE 拥有的积分因子, 求相应的首次积分;

(7) 通过用给定 ODE 拥有的对称和伴随对称, 代数地构造首次积分.

如果给定 n 阶 ODE 拥有单参数 Lie 点变换群, 则通过利用该群的正则坐标或微分不变量, 它的阶可以构造性地被约化, 以得到 $n-1$ 阶 ODE. 而且, 求解约化的 ODE 之后, 用求积分可得到给定 ODE 的解.

非平凡单参数 Lie 变换群作用下, 一阶 ODE 的不变性等价于 ODE 的积分因子的存在性. 一般地, 该等价性对于高阶 ODE 并不成立. 然而, 如果高阶 ODE 拥有变分公式 (Langrange 算子), 则 ODE 的变分原理所拥有的单参数 Lie 局部变换群 (变分对称) 作用下它的不变性等价于 ODE 的积分因子的存在性 (古典 Noether 定理). 如果 n 阶 ($n \geqslant 1$)ODE 的线性化方程是自伴随的 (这仅仅对于偶数阶的 ODE 是可能的), 则它拥有变分原理. 对于自伴随 ODE, 它的变分原理所拥有的单参数 Lie 点变换群, 构造性地导致阶降低 2 次 (Olver, 1986). 在 Hamilton 背景下, Marsden 和 Ratiu (1999) 讨论了这样 ODE 的几何约化程序.

任意一阶 ODE 拥有非平凡的无穷参数 Lie 点变换群. 二阶 ODE 至多拥有 8 参数 Lie 点变换群. 而且, 如果二阶 ODE 的确拥有 8 参数 Lie 点变换群, 那么存在点变换将该 ODE 映射成线性 ODE, 特别地, 约化为 ODE: $y''=0$. n 阶 ($n \geqslant 3$)ODE 至多拥有 $(n+4)$ 参数 Lie 点变换群.

Olver (1986) 证明了, 如果 n 阶 ODE 拥有 r 参数 ($r \leqslant n$) 可解 Lie 点变换群, 那么它能被约化为 $n-r$ 阶 ODE 和 r 个求积分. 3.4 节中提出的约化算法出现在文献 (Bluman, 1990b). Bianchi (1918, 部分 167) 首次考虑用可解 Lie 群 (早期文献中称为可积群) 来约化常微分方程组的阶 (Eisenhart, 1933, 部分 36).

人们可以将 Lie 点变换群 (点对称) 作用下 ODE 的不变性的有关工作推广到更一般的局部变换作用下的不变性, 这种更一般的局部变换的特征是无穷小生成元依赖于因变量的导数. 这样的拓展包括二阶或高阶 ODEs 有关的 Lie 接触变换 (接触对称) 作用下的不变性, 更一般地, 包括三阶或高阶 ODEs 有关的高阶变换 (高阶对称) 作用下的不变性. 在做这样的推广时, 用解–解的直接映射的观点考虑 ODEs 的不变性将更方便, 即利用保持 ODE 的自变量固定的局部变换. 此时, ODE 的对称 (点、接触或高阶) 可由线性确定方程组的任一解生成, 该线性确定方程组是由给定 ODE 的全部解的线性化导出的. Abraham-Shrauner 等 (1995), Stephani (1989) 和 Hydon (2000) 考虑了 ODEs 的接触对称.

从几何上讲, n 阶 ODE 的对称描述了在它的解空间上的运动. 这种运动在 jet 空间 (参看 2.8 节) 中最能自然地表示出来, 其坐标包括自变量、因变量及至少到 n 阶的导数. 这里, 给定的 n 阶 ODE 对应于一个余维 -1 曲面, 其特征形式的对

称 (单参数局部变换群) 表示与曲面相切的向量场的积分曲线, 该曲线不涉及与自变量相关的运动, 并保持剩余坐标之间的导数关系 (接触理想). 作为局部变换, 点对称和接触对称在于源自定义于整个 jet 空间 (不考虑 ODE 及其对应的曲面) 的向量场. 而高阶对称则不同, 除非对 jet 空间作无限阶扩张 (延拓), 使得其坐标包含因变量的所有阶导数.

任何二阶 ODE 都允许无限个接触对称, 即接触变换的无穷参数 Lie 群. 任何 n 阶 $(n>2)$ ODE 都允许无限个 $(n-1)$ 阶对称, 即 $(n-1)$ 阶局部变换的无穷参数群. 但是, 任何 n 阶 $(n>2)$ ODE 都只允许至多有限个阶数严格小于 $(n-1)$ 的对称, 即它所允许的任何阶数不超过 $n-2$ 的局部变换的群都是有限维的. 自然地, ODE 的完全对称群具有抽象的无穷维 Lie 群的结构 (参考 2.8 节). 对于阶数 $n>1$ 或 $n>2$ 的 ODE, 其所允许的点对称或接触对称的子群对应于有限维抽象 Lie 群.

类似地, 任何二阶或 n 阶 $(n>1)$ ODE 都允许无限个线性无关的 $(n-1)$ 阶的积分因子 (即本质上依赖于因变量的直到 $(n-1)$ 阶导数), 但只允许至多有限个阶数严格小于 $n-1$ 的积分因子. 一般来讲, ODE 的积分因子与任何重要的不变性或几何运动没明显的联系, 但在经典 Noether 定理的情形下, 积分因子是保持 ODE 的变分原理不变的对称.

积分因子与 ODE 的乘积将 ODE 化为全微分 (恰当) 形式. 因此, n 阶 ODE 的任何积分因子都满足线性确定方程组, 该方程组是通过将 Euler 算子 (Olver, 1986) 作用于 ODE 与积分因子的乘积并令其为零而导出的. 关于恰当 n 阶 ODE 与积分因子的理论框架, 见文献 (Kamke, 1943; Kaplan, 1958). 对于一阶 ODE, 积分因子的经典表述是它将 ODE 化为自变量与因变量的恰当微分形式 $\mathrm{d}\psi(x,y)=\Lambda(x,y)(\mathrm{d}y-f(x,y)\mathrm{d}x)=0$, 这在 jet 空间中自然被推广到高阶 ODE, 因为总能用 jet 空间的坐标将恰当 n 阶 ODE: $\mathrm{d}\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})/\mathrm{d}x=0$ 写成 n 个恰当微分形式 $\mathrm{d}\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})=\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})(\mathrm{d}y_{n-1}-f(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})\mathrm{d}x)=0$ 和 $\mathrm{d}y_i=y_{i+1}\mathrm{d}x, i=0,1,\cdots,n-2, y_0\equiv y$. 利用任何恰当微分形式是封闭的这一事实, 可得到积分因子 $\Lambda(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的确定方程组. 这样得到的确定方程组包含 $1+(n(n-1)/2)$ 个方程, 它与通过 Euler 算子模式得到的确定方程组在本质上是相同的. 而且, 首次积分 $\psi(x,y,y_1,\cdots,y_{n-1})$ 的线积分公式与 Poincaré 同伦公式相同, 此公式被用来证明闭微分形式是局部恰当的.

相反, 3.6.4 节给出的关于 n 阶恰当 ODE 的理论框架是将截断的标准 Euler 算子应用于和给定 ODE 有着自然联系的有限阶 jet 空间. 最重要的是, 这将简化积分因子确定方程组, 使之等价于仅含 $1+[n/2]$ 个方程的确定方程组. 据我们所知, 这一结果尚未在其他文献中出现过.

任意积分因子还满足给定 ODE 的对称确定方程组的伴随线性方程组. 特别地, 积分因子的 $1+[n/2]$ 个确定方程可自然地分解为伴随方程组和另外 $[n/2]$ 个确

定方程. 伴随方程组的应用见于 Gordon (1986) 和 Sarlet 等 (1987, 1990) 的相关工作, 他们把伴随方程组的解称为 "伴随对称". 注意, 一般来讲, 伴随方程组的解本身不是对称生成元, 除非给定的 ODE 是自伴随的, 此时称为伴随对称. 积分因子确定方程组的分解导致了积分因子的另一个有用特性, 即作为伴随对称满足额外的伴随不变条件, 见 3.7.2 节. 而且, 基于这一点, 具有变分原理情形下的 ODE、经典的积分因子与变分对称的等价性明显可被推广到不具有变分原理情形下的 ODE, 积分因子和满足伴随不变条件的伴随对称的等价性. 这最终为 3.6.4 中出现的由积分因子的 $1+[n/2]$ 个确定方程所组成的对偶系统提供了一个更具几何要求的表述. 这里的 jet 空间的全导数算子由 ODE 所确定的曲面的切导数所取代.

n 阶 ODE 的局部存在性理论保证了给定的 ODE 允许 n 个函数无关 (即每一个都不是其余的函数的组合) 的首次积分. 对于 ODE 的解, 任一首次积分都等价于一个常数. 因此, 它对 ODE 的自变量的全微分就是积分因子与 ODE 的乘积. 首次积分与积分因子的对应类似于局部变换群与其特征形式无穷小生成元的无穷小的对应.

ODE 所允许的任一积分因子可构造性地使 ODE 降一阶, 这是通过对应的由线积分公式确定的首次积分实现的. 这种降阶方法是对 ODE 的 Lie 对称约化方法的补充. 而且, 积分因子法在算法上并不比 Lie 算法复杂. 最重要的是, 积分因子法得到的首次积分在降阶时保持方程的原有变量, 而 Lie 变换群法在降阶时往往不保持原变量. Anco, Bluman (1997a, 1998) 对积分因子方法有充分的讨论. 相关工作也可见文献 (Sheftel, 1997, 3.5 节; Cheb-Terrab, Roche, 1999; Hydon, 2000).

ODE 的对称、共轭对称和积分因子的计算本质上是相似的, 因为它们都涉及求线性确定系统. 进一步讲, 在计算 n 阶 ODE 的阶数严格小于 $n-1$ 的对称、伴随对称和积分因子时, 确定系统约化为超定的齐次线性偏微分方程组. 特别地, 在这样的情况下, 将求点对称超定线性系统的标准算法做简单推广, 可得到相应确定系统的全部精确解. 也可以通过做有效的假设, 将确定系统分解为超定的齐次线性偏微分方程组, 从而获得系统的一些特解. 这样的假设包括点式假设、消元假设及源于给定的 ODE 所允许的任意 Lie 点变换群的不变解假设 (见第 4 章). 一些高效的计算机代数系统, 如 REDUCE, MATHEMATICA, MAPLE(被用来计算 3.5~3.8 节中的 ODE 算例) 可用于求所得到的超定系统.

最为重要的是, 允许给定假设的对称的 ODE 类, 其基数和允许同一假设的积分因子的 ODE 类的基数相同. 因此, 用积分因子法对 ODE 降阶, 其有效性不亚于对称方法.

另一种对 ODE 降阶的方法是利用对称或伴随对称, 通过特定的公式来直接构造首次积分. 3.8.1 节的标度对称公式是 Olver(1986) 及 Anco, Bluman (1996, 1997a) 中线性偏微分方程守恒律公式在 ODE 情形的对应. 3.8.2 节的 Wronski 公

式是 Hydon(2000) 给出的相关算法的推广. 该算法被用来获得允许至少 $n+1$ 个点对称的任一 n 阶 ODE 的首次积分.

对 n 阶 ODE 的边值问题, 利用 ODE 在 r 参数可解 Lie 变换群下的不变性, 可将给定的边值问题约化为 $(n-r)$ 阶 ODE 的边值问题. 这对获得边值问题解的定性结果有重要作用. 进一步讲, 计算 ODE 边值问题所允许的 Lie 变换群将导致求解 ODE 的有效数值算法 (Dresner, 1983, 1999). 另外, 如果边值条件是合适的类型, 投点法与 Lie 群不变性 (从已知解得到一组依赖于参数的解) 合用时会被约化为单投点.

如果 ODE 拥有 Lie 变换群, 就可以构造所拥有的变换下的不变特解. 这样的解也是群的不变曲线. n 阶 ODE 不变解的构造可被推广到所允许的任意不超过 n 阶的变换群下的不变解. 对二阶或更高阶 ODE, 不需显式求解给定的 ODE 就可得到由点对称下的不变性所确定的不变解. 对一阶 ODE, 不变解是通过求解相关的代数方程组得到的. 而且, 如果分离变量解或奇性包络解存在, 则这些解是方程所允许的任意 Lie 变换群的不变解. 因此, 求这样的解并不需要确定给定一阶 ODE 的通解. 3.10 节的结果曾在文献 (Bluman, 1990c) 中给出. Wulfman (1979) 从群的角度考虑了极限环分离变量. Dresner (1983, 1999) 考虑了标度不变情形下分离变量解的构造. 从不变性角度对包络解的讨论见文献 (Page, 1896, 1897; Cohen, 1911; Dresner, 1999).

这里对常微分方程组的一些已知结果作一总结. 利用 3.2 节中的思想可以证明, 一阶 ODE 组成的方程组往往拥有无穷参数的平凡和非平凡 Lie 点变换群. 不过还没有确定这些群的构造性方法 (Ovsiannikov, 1982, 8 节). Gonzalez-Gascon, Gonzalez-Lopez (1983) 证明, 由 m 个 n 阶 ODE 组成的方程组, 当 $n=2$ 时, 最多允许 $[2(m+1)^2]$ 参数 Lie 点变换群; 当 $n>2$ 时, 最多允许 $(2m^2+mn+2)$ 参数 Lie 点变换群. 如果 m 个一阶 ODE 组成的方程组允许 r 参数可解 Lie 点变换群 $(r \leqslant m)$, 则它可被约化为含 $m-r$ 个一阶 ODE 的方程组外加 r 个求积分, 后面两个结果见文献 (Olver, 1986). 有关构造常微分方程组积分因子的理论框架, 见文献 (Anco, Bluman, 1998). Senthilvelan 和 Lakshmanan(1995) 给出一些有意义的例子.

第 4 章将考虑偏微分方程 (组) 在 Lie 点变换群下的不变性. 一般来说, 利用偏微分方程 (PDE) 在单参数 Lie 点变换群下的不变性不能导出约化的 PDE, 使得该方程的解包含原方程的所有解, 这与 ODE 的情形不同. 由 ODE 在单参数 Lie 点变换群下的不变性, 可导出约化的 ODE, 该 ODE 的解包含原方程的所有解. 不过, 我们可以利用和 ODE 情形相同的方法, 定义和构造由 PDE 在 Lie 点变换群下的不变性所确定的不变解. 对 ODEs 来说, 这样的特解是通过求解约化的代数方程组得到的; 对 PDEs, 求这样的特解则需要解含较少自变量的约化的 PDE.

第 4 章　偏微分方程

4.1　引　　言

本章介绍如何利用 Lie 点变换 (点对称) 群作用下偏微分方程 (PDEs) 的不变性来构造它的解. 将考虑标量 PDEs 和 PDEs 系统两种情况.

与常微分方程的情形相似, 我们将看到, 确定一个给定 PDE 所拥有的 Lie 点变换群的无穷小生成元, 其算法可由它的不变性的无穷小准则直接导出. 利用 Lie 点对称群的不变曲面可得到不变解 (相似解), 这样的解是通过求解约化方程得到的. 约化方程所含未知变量个数比原方程少.

我们还将讨论如何利用 Lie 点变换群作用下的不变性求解 PDEs 的边值问题. 如果 PDE 所拥有的单参数 Lie 点对称群同时也使边值问题的边界条件和邻域不变, 那么此边值问题的解也是不变解. 因此, 边值问题可被构造性地约化为含更少自变量的 PDEs 的边值问题. 对于线性 PDE, 限制条件可以放宽, 不必要求边界条件不变. 对应于同一特征函数展开的不变解进行叠加, 可得边值问题的解, 其中特征值是利用一个齐次线性 PDE 在其自变量的标度变换作用下的不变性得到的. 另外, 也将讨论多参数 Lie 点变换群作用下边值问题的不变性.

4.1.1　PDE 的不变性

首先, 考虑 k 阶标量 PDE. 用

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0 \tag{4.1}$$

表示一个 k 阶标量 PDE, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是自变量, u 表示因变量, $\partial^j u$ 表示具有分量 $\partial^j u/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j} = u_{i_1 i_2\cdots i_j}, i_j = 1, 2, \cdots, n, j = 1, 2, \cdots, k$ 的坐标, 它对应于 u 对 x 的所有 j 阶偏导数.

根据坐标 $x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$, PDE (4.1) 变为代数方程, 它定义了 $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 空间上的超曲面 (这里 $(x, u, \partial u)$ 空间是 $2n+1$ 维, $(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ 空间是 $\dfrac{1}{2}(n^2 + 5n + 2)$ 维, 等等) 对于 PDE (4.1) 的任意解 $u = \Theta(x)$, 方程

$$(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = (x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \cdots, \partial^k\Theta(x))$$

定义了位于曲面 $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$ 上的解曲面.

假设根据 u 的 ℓ 阶偏导数的一些特殊分量, PDE (4.1) 可以写成可解形式

$$F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=u_{i_1 i_2\cdots i_\ell}-f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0, \tag{4.2}$$

其中 $f(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)$ 并不显式地依赖 $u_{i_1 i_2\cdots i_\ell}$.

定义 4.1.1.1　单参数 Lie 点变换群

$$x^*=X(x,u;\varepsilon), \tag{4.3a}$$

$$u^*=U(x,u;\varepsilon) \tag{4.3b}$$

保持 PDE(4.1) 不变, 即它是 PDE (4.1) 的点对称, 当且仅当它的由 (2.115a~d) 和 (2.116a, b) 确定的 k 阶延拓保持曲面 (4.1) 不变.

PDE (4.1) 的一个解 $u=\Theta(x)$ 位于曲面 (4.1) 且 $u_{i_1 i_2\cdots i_j}=\partial^j\Theta(x)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$. (4.3a,b) 的 k 阶延拓作用下曲面 (4.1) 的不变性意味着, 对于任意 ε, 单参数群 (4.3a,b) 作用下 PDE(4.1) 的任意解 $u=\Theta(x)$ 映成它的另一解 $u=\Phi(x;\varepsilon)$. 而且, 如果变换 (4.3a,b) 将 PDE (4.1) 的任意解 $u=\Theta(x)$ 映成 (4.1) 的另一解 $u=\Phi(x;\varepsilon)$, 那么曲面 (4.1) 在 (4.3a,b) 作用下是不变的, 且 $u_{i_1 i_2\cdots i_j}=\partial^j\Phi(x;\varepsilon)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$. 从而, PDE(4.1) 的解集在单参数 Lie 点变换群 (4.3a,b) 的作用下是不变的当且仅当 (4.1) 拥有 (4.3a,b).

由定义 4.1.1.1, 根据无穷小生成元、定理 2.6.7.1 关于不变曲面的准则以及定理 2.4.4.1 关于延拓的无穷小, 可有如下的定理 (该节的剩余部分, 用重复指标表示求和).

定理 4.1.1.1(PDE 的不变性的无穷小准则)　令

$$X=\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.4}$$

是 Lie 变换群 (4.3a,b) 的无穷小生成元. 令

$$\begin{aligned}X^{(k)}=&\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta(x,u)\frac{\partial}{\partial u}+\eta_i^{(1)}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i}+\cdots\\&+\eta_{i_i i_2\cdots i_k}^{(k)}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_i i_2\cdots i_k}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

是 (4.4) 的 k 阶延拓无穷小生成元, 其中

$$\xi(x,u)=(\xi_1(x,u),\xi_2(x,u),\cdots,\xi_n(x,u)),\quad \eta(x,u).$$

$\eta_i^{(1)}$ 和 $\eta_{i_1 i_2\cdots i_j}^{(j)}, i_j=1,2,\cdots,n, j=1,2,\cdots,k$ 分别由 (2.119a) 和 (2.119b) 确定, 则单参数 Lie 点变换 (4.3a,b) 为 PDE (4.1) 所拥有, 即是 PDE (4.1) 的点对称, 当且仅当

$$X^{(k)}F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0,\quad 对\ F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0. \tag{4.6}$$

证明留作习题 4.1.3.

4.1.2 初等例子

1. 平移群

二阶 PDE

$$u_{xx} = f(u_{xt}, u_{tt}; u_x, u_t, u, x) \tag{4.7}$$

拥有单参数 (ε) 的 Lie 平移群

$$x^* = x, \tag{4.8a}$$

$$t^* = t + \varepsilon, \tag{4.8b}$$

$$u^* = u, \tag{4.8c}$$

因为在 (4.8a~c) 作用下, 有

$$u^*_{x^*x^*} = u_{xx}, \quad u^*_{x^*t^*} = u_{xt}, \quad u^*_{t^*t^*} = u_{tt}, \quad u^*_{x^*} = u_x, \quad u^*_{t^*} = u_t,$$

使得由 (4.7) 定义的曲面在 $(x, u, \partial u, \partial^2 u)$ 空间上是不变的, 且 $x_1 = x, x_2 = t$. 则

$$u = \phi(x) \tag{4.9}$$

在 (4.8c) 作用下是不变的, 且定义了 PDE (4.7) 的解 (不变解), 假若 $\phi(x)$ 解二阶 ODE

$$\phi''(x) = f(0, 0, \phi'(x), 0, \phi(x), x).$$

注意, $u = \Theta(x, t)$ 定义了 (4.8a~c) 的不变曲面 (见定理 2.6.7.1), 当且仅当

$$X(u - \Theta(x, t)) = -\frac{\partial \Theta(x, t)}{\partial t} = 0, \quad \text{当 } u = \Theta(x, t),$$

式中 $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$是 Lie 平移群 (4.8a~c) 的无穷小生成元. 这导致不变解的不变形式 (相似形式) (4.9), 其源于 (4.8a~c) 作用下 PDE(4.7) 的不变性.

在 Lie 平移群 (4.8a~c) 作用下, PDE (4.7) 的解 $u = \Theta(x, t)$ 映成单参数解族 $u = \Phi(x, t; \varepsilon) = \Theta(x, t + \varepsilon)$, 假若 $u = \Theta(x, t)$ 不是 (4.8a~c) 作用下 PDE (4.7) 的不变性导致的不变解, 即 $\Theta(x, t)$ 本质依赖 t.

2. 尺度群

波方程

$$u_{xx} = u_{tt} \tag{4.10}$$

拥有单参数 Lie 尺度群

$$x^* = \alpha x, \tag{4.11a}$$

$$t^* = \alpha t, \tag{4.11b}$$

$$u^* = u, \tag{4.11c}$$

因为 $u^*_{x^*x^*} = \alpha^{-2}u_{xx}, u^*_{t^*t^*} = \alpha^{-2}u_{tt}$, 从而对 $u_{xx} = u_{tt}$, 有 $u^*_{x^*x^*} = u^*_{t^*t^*}$.

如果选择正则坐标 $r = x/t, s = \log t, u$, 使得 Lie 尺度群 (4.11a~c) 变为 $r^* = r, s^* = s + \log\alpha, u^* = u$, 那么 PDE (4.10) 变换为 PDE

$$(1 - r^2)u_{rr} - u_{ss} + 2ru_{rs} + u^s - 2ru_r = 0. \tag{4.12}$$

相应地

$$u = \phi(r) = \phi\left(\frac{x}{t}\right) \tag{4.13}$$

定义了 PDE(4.12) 的不变解, 因此也是波方程 (4.10) 的不变解, 假如 $\phi(r)$ 满足 ODE

$$(1 - r^2)\phi''(r) - 2r\phi'(r) = 0. \tag{4.14}$$

尺度群 (4.11a~c) 的无穷小生成元为 $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + t\dfrac{\partial}{\partial t}$. 因而, $u = \Theta(x,t)$ 定义了 (4.11a~c) 的不变曲面, 当且仅当

$$\mathrm{X}(u - \Theta(x,t)) = 0, \quad \text{当 } u = \Theta(x,t),$$

即当且仅当

$$x\Theta_x + t\Theta_t = 0. \tag{4.15}$$

相应特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{0}$$

的解导致不变形式 (4.13). 将 (4.13) 代入波方程 (4.10) 得到 ODE (4.14). 为了不变解, 我们知道并不需要发现 Lie 尺度群 (4.11a~c) 的正则坐标.

而且, 在 Lie 尺度群 (4.11a~c) 作用下, 波方程 (4.10) 的解 $u = \Theta(x,t)$ 映成 (4.10) 的单参数解族 $u = \Phi(x,t;\alpha) = \Theta(\alpha x, \alpha t)$, 假如 $u = \Theta(x,t)$ 不是由 (4.11a~c) 作用下 (4.10) 的不变性导致的不变解, 即 $u = \Theta(x,t)$ 不具有形式 (4.13).

3. 线性 PDE 的不变解的叠加

波方程 (4.10) 拥有单参数 Lie 点变换群

$$x^* = x, \tag{4.16a}$$

$$t^* = t + \varepsilon, \tag{4.16b}$$

$$u^* = \mathrm{e}^{\varepsilon\lambda}u, \tag{4.16c}$$

其中 $\lambda \in C$ 是任意常数. (4.16a~c) 的无穷小生成元为

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda u\frac{\partial}{\partial u}.$$

事实上, Lie 点变换群 (4.16a~c) 定义了 2 参数 (ε, λ) Lie 变换群, 对应于 t 的平移和 u 的尺度变换作用下波方程的不变性. 因此, 不变解 $u = \Theta(x,t)$ 一定满足不变曲面条件

$$X(u - \Theta(x,t)) = \lambda u - \Theta_t = 0, \quad \text{当 } u = \Theta(x,t),$$

即

$$u_t = \lambda u. \tag{4.17}$$

正如 ODEs 的情形 (见 3.10 节), 我们能够通过两种程序求得不变解:

方法 I (不变形式法) 不变曲面条件的解为不变形式

$$u = \phi(x)\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{4.18}$$

式中 $\phi(x)$ 为任意函数. 则将 (4.8) 代入波方程 (4.10) 可得 ODE

$$\phi''(x) = \lambda^2 \phi(x).$$

因而, 通过解这个简单的 ODE, 可以获得 PDE (4.10) 的不变解

$$u = \Theta(x,\, t) = C\mathrm{e}^{\lambda(t \pm x)}, \tag{4.19}$$

其中 C 是任意常数.

方法 II (直接代入法) 这里直接将不变曲面条件 (4.17) 代入 PDE (4.10), 避免显式地解 (4.17). 则 $u_{tt} = \lambda u_t = \lambda^2 u$. 从而有 $u_{xx} = \lambda^2 u$, 使得

$$u = \psi(t)\mathrm{e}^{\pm \lambda x}, \tag{4.20}$$

其中 $\psi(t)$ 是任意函数. 那么将 (4.20) 代入不变曲面条件 (4.17) 可知, 满足 ODE: $\psi'(t) = \lambda \psi(t)$, 因此有不变解 (4.19).

因为波方程 (4.10) 是线性齐次 PDE, 由此可知, 不变解的叠加

$$\sum_{\lambda} C(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t \pm x)}, \quad \sum_{\lambda} [C_1(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t-x)} + C_2(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t+x)}], \quad \int_{\gamma} C(\lambda)\mathrm{e}^{\lambda(t \pm x)}\mathrm{d}\lambda, \quad \cdots$$

定义了 (4.10) 的解, 其中 $\lambda \in \mathbf{C}$ 是特征值, γ 是复 λ 平面上的一条路径. 特殊的叠加对应于解的 Fouries 级数、Laplace 变换和 Fouries 变换表示.

作为一般的注释, 我们指出, 如果可以发现不变曲面条件的通解. 不变形式法是有用的, 然而, 如果不能够显式地求解不变曲面条件, 则必须使用直接代入法.

习 题 4.1

1. 对任意确定的常数 $\alpha \in \mathbf{R}$. 利用单参数 (ε) Lie 平移群

$$x^* = x + \varepsilon, \quad t^* = t + \alpha\varepsilon$$

作用下波方程 (4.10) 的不变性, 求它的不变解. 这些解与 (4.10) 的通解的关系如何?

2. (a) 证明: 拥有 2 参数 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ Lie 平移群 $x^* = x + \varepsilon_1$, $t^* = t + \varepsilon_2$ 的最一般的二阶 PDE 具有如下形式

$$F(u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t, u) = 0.$$

(b) 对固定的常数 $c \in \mathbf{R}$, 利用单参数 (ε) Lie 平移群 $x^* = x + c\varepsilon$, $t^* = t + \varepsilon$ 作用下该 PDE 的不变性, 求它的不变解.

(c) 求 KdV 方程 $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$ 的不变解. 特别地, 证明: $u = \Theta(x,t) = U(z) + c$ 满足 KdV 方程, 其中 $z = ct - x, c = \text{const} > 0, U(z)$ 满足 ODE: $U''' + UU' = 0$. 验证 $U = c\left(3\text{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{c}z\right) - 1\right)$ 是该 ODE 的特解, 并证明 KdV 方程的相应的行波解 (孤子解) $u = \Theta(x,t)$ 满足 $u \to 0$, 当 $x \to \pm\infty$.

3. 证明定理 4.1.1.1.

4.2　标量 PDEs 的不变性

4.2.1　不变解

考虑 k 阶 PDE (4.1) $(k \geqslant 2)$, 它拥有单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.4). 假设

$$\xi(x, u) \neq 0.$$

定义 4.2.1.1　$u = \Theta(x)$ 是 PDE (4.1) 的不变解, 且该解源于它的具有无穷小生成元 (4.4) 的点对称, 当且仅当

(i) $u = \Theta(x)$ 是 (4.4) 的不变曲面;

(ii) $u = \Theta(x)$ 满足 (4.1).

由此可知, $u = \Theta(x)$ 是 PDE (4.1) 在点对称 (4.4) 作用下的不变解, 当且仅当 $u = \Theta(x)$ 满足下面两个条件:

(i) $X(u - \Theta(x)) = 0$, 当 $u = \Theta(x)$, 即

$$\xi_i(x, \Theta(x)) \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} = \eta(x, \Theta(x)); \tag{4.21a}$$

(ii) $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0$, 当 $u = \Theta(x)$, 即

$$F(x, \Theta(x), \partial\Theta(x), \partial^2\Theta(x), \cdots, \partial^k\Theta(x)) = 0. \tag{4.21b}$$

对于源于点对称 (4.4) 作用下不变性所得到的不变解来说, 方程 (4.21a) 称为不变曲面条件. PDEs 的不变解首次由 Lie (1881) 所研究. 它们可以通过两种程序来确定.

(1) 不变形式法. 这里, 首先为了解不变曲面条件, 即关于 $u = \Theta(x)$ 的一阶 PDE (4.21a), 解相应的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\xi_1(x,u)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\xi_2(x,u)} = \cdots = \frac{\mathrm{d}x_n}{\xi_n(x,u)} = \frac{\mathrm{d}u}{\eta(x,u)}. \tag{4.22}$$

如果 $y_1(x,u)$, $y_2(x,u)$, $\cdots, y_{n-1}(x,u)$, $v(x,u)$ 是 n 个函数无关的常数, 其源于求解 n 个一阶常微分方程构成的系统 (4.22) 且 $\partial v/\partial u \neq 0$, 那么 PDE (4.21a) 的通解 $u = \Theta(x)$ 隐式地由如下不变形式给出

$$v(x,u) = \Phi(y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u)), \tag{4.23}$$

其中 Φ 是 $y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u)$. 的任意可微函数. 注意, $y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u), v(x,u)$ 是点对称 (4.4) 的 n 个函数无关的群不变量, 因而是 Lie 点变换群 (4.3a,b) 的 n 个正则坐标. 令 $y_n(x,u)$ 是第 $(n+1)$ 个正则坐标且满足

$$Xy_n = 1.$$

如果利用自变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 和因变量 v , 可将 PDE (4.1) 变换为另一个 k 阶 PDE, 那么变形的 PDE 将拥有单参数 Lie 平移群

$$y_i^* = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \tag{4.24a}$$

$$y_n^* = y_n + \varepsilon, \tag{4.24b}$$

$$v^* = v. \tag{4.24c}$$

因此, 变形的 PDE 并不显含变量 y_n, 从而变形 PDE 具有 (4.23) 类型的解. 结果, PDE (4.1) 具有不变解, 其隐式地由不变形式 (4.34) 给出. 那样的解可以通过求解含 $n-1$ 自变量 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 和一个因变量 v 的约化的微分方程来得到. 变量 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 共同称为相似变量. 将不变形式 (4.13) 代入 PDE (4.1) 可得约化的微分方程. 假设该代入并不导致关于 v 的奇异微分方程. 注意, 如果通常情况下有 $\partial\xi/\partial u \equiv 0$, 那么 $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$; 如果 n= 2, 那么约化的微分方程是 ODE, 且用 $\zeta = y_1$ 来表示相似变量.

(2) 直接代入法. 该程序是特别有用的, 事实上, 如果不能显式地解不变曲面条件 (4.21a), 即特征方程 (4.22), 则必须使用该程序. 可以假设 $\xi_n(x,u) \neq 0$ (如果 $\xi_i(x,u) \equiv 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则代数方程 $\eta(x,u) = 0$ 的解 $u = \Theta(x)$ 定义了满足 (4.21a) 的不变曲面. 任意那样的解 $u = \Theta(x)$ 是 (4.1) 的不变解, 当且仅当它满足给定的 PDE (4.1)). 因此, 一阶 PDE (4.21a) 可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\eta(x,u)}{\xi_n(x,u)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i(x,u)}{\xi_n(x,u)} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{4.25}$$

由 (4.25) 以及它的微分结果可知, 关于 x_n 的 u 的导数中的任意项可以用 x, u 和 u 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的导数来表示. 从而对于 (4.1) 中所有包含关于 x_n 的 u 的导数, 直接将 (4.25) 和它的微分结果代入给定的 PDE (4.1), 可得至多具有 k 阶的约化微分方程, 其包含因变量 u, $n-1$ 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 和参数 x_n. 该约化的微分方程的任意解定义了 PDE (4.1) 的不变解, 该解是由含无穷小生成元 (4.4) 的 Lie 点变换群作用下 (4.1) 的不变性得到的, 假如不变曲面条件, 或等价地, 给定 PDE(4.1) 本身也成立. 如果 $n=2$, 约化微分方程是 ODE. 出现在该 ODE 的通解中的常数是参数 x_n 的任意函数. 通过将这个通解代入 (4.25) 或给定 PDE(4.1), 可以确定这些任意函数. 注意, 直接代入法比不变形式法可以更好地进行计算, 因为它避免了特征 ODEs 的积分.

4.4.1 节中, 我们将推广直接代入法和不变形式法, 由拥有的多参数点对称群求不变解.

4.2.2　k 阶 PDE 对称的确定方程

考虑 k 阶 PDE($k \geqslant 2$, $\ell \leqslant k$)

$$u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} = f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u), \tag{4.26}$$

其中 $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 不显式地依赖 $u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$. 根据定理 4.1.1.1 可知, PDE (4.26) 拥有单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为

$$X = \xi_i(x, u)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.27}$$

它的 k 阶延拓为 (4.5), 当且仅当 $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$ 满足对称确定方程

$$\eta^{(\ell)}_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} = \xi\frac{\partial f}{\partial x_j} + \eta\frac{\partial f}{\partial u} + \eta^{(1)}_j\frac{\partial f}{\partial u_j} + \cdots + \eta^{(k)}_{j_1 j_2 \cdots j_k}\frac{\partial f}{\partial u_{j_1 j_2 \cdots j_k}} \tag{4.28}$$

当 u 满足 (4.26).

容易验证:

(i) $\eta^{(p)}_{j_1 j_2 \cdots j_p}$ 关于坐标 $\partial^p u$ 是线性的, 如果 $p \geqslant 2$;

(ii) $\eta^{(p)}_{j_1 j_2 \cdots j_p}$ 是关于坐标 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^p u$ 的多项式, 且系数关于 $\xi(x, u), \eta(x, u)$ 以及它们的关于 x 和 u 的直到 p 阶的导数是线性齐次的.

由 (i) 和 (ii) 可知, 如果 $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 是分量 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的一个多项式, 那么对称确定方程 (4.28) 是分量 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的多项式, 且系数关于 $\xi(x, u), \eta(x, u)$ 以及它们的关于直到 k 阶的导数是线性齐次的. 观察可知, 在任意点, 可以给每个分量 $u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 赋予任意的值, 假如 PDE(4.26) 成立, 特别地, 对于对称确定方程 (4.28), 如果用 $f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 代替 $u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$, 则对

于坐标 $x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的其他分量的任意值, 所得到的表达式一定成立. 而且, 所得到的表达式是关于 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的其余分量的多项式方程. 从而, 该多项式方程的系数一定为零. 于是得到一个关于 $n+1$ 个函数 $\xi(x,u), \eta(x,u)$ 的线性齐次偏微分方程组. 这个线性齐次偏微分方程组叫做 PDE (4.26) 的无穷下生成元 (4.27) 的确定方程组. 这个确定方程组是关于 $\xi(x,u), \eta(x,u)$ 的一个超定偏微分方程组, 因为, 一般地, 它含有多于 $n+1$ 个确定方程.

当 PDE(4.26) 不是分量 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的一个多项式方程时, 将分量 $u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$ 代入后, 且利用分量 $\partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u$ 的无关性, 还可以将对称确定方程 (4.28) 分成关于 $\xi(x,u), \eta(x,u)$ 的线性齐次偏微分方程组. 特别地, 所得到的确定方程组将是关于 $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ 的超定系统.

当确定方程组是超定时, 经常会出现它仅仅有平凡解 $\xi(x,u) = \eta(x,u) = 0$. 这种情况下, 给定 PDE (4.26) 并不拥有点对称 (虽然 (4.26) 可能拥有接触对称、高阶对称, 或非局部对称, 这些可以通过考虑比 (4.27) 更一般的无穷小生成元).

当确定方程组的通解是非平凡时, 存在两种情况: 如果通解包含至多有限数目个基本任意常数, 那么由此可得 (4.26) 的单参数 Lie 点变换群; 如果通解不能用有限个基本常数表示 (例如, 当它包含无限个基本常数或分量的任意函数), 那么由此可得 (4.26) 的无穷参数 Lie 点变换群.

可以容易验证, 任意线性非齐次 PDE

$$Lu = g(x) \tag{4.29}$$

拥有平凡的无穷参数 Lie 点变换群

$$x^* = x, \tag{4.30a}$$

$$u^* = u + \varepsilon\omega(x), \tag{4.30b}$$

其中 $\omega(x)$ 是辅助齐次线性 PDE

$$L\omega = 0 \tag{4.31}$$

的任意解 (群 (4.30a,b) 是重要的, 当考虑将非线性 PDEs 映成线性 PDEs 时 (Kumei, Bluman, 1982; Bluman, Kumei, 1990a)). 在这个平凡的无穷参数 Lie 点变换群中, 线性 PDE 的 Lie 点变换群最多拥有有限个参数.

对于实际应用中出现的大批的标量 PDE(4.1), 现在陈述一些关于它们的点对称形式有用的结论. 对于给定的 PDE (4.1), 这些结果在建立和求解无穷小 $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ 的确定方程组方面, 大大简化了很多计算. 假设 PDE (4.1) 中 $F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 是 $\partial^k u$ 分量的线性函数, 并且假设 $\partial^k u$ 分量的系数至多依赖 x 和 u, 则 PDE(4.1) 具有形式

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x,u)u_{i_1 i_2 \cdots i_k} = g(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u), \tag{4.32}$$

且系数 $A_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x,u)$ 关于它们的指标是对称的. 下面的定理成立:

定理 4.2.2.1 假设 k 阶 PDE (4.26) 具有形式

$$B_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x)u_{i_1 i_2 \cdots i_k} = g(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u), \quad k \geqslant 2, \tag{4.33}$$

它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27). 如果并不存在自变量 x 的变换, 使得 PDE(4.33) 等价于 PDE

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k} = G(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u), \tag{4.34}$$

其中 $G(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u)$ 是某函数, 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

定理 4.2.2.2 假设 PDE(4.34) 的阶为 $k \geqslant 2$, 它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27), 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 2,\cdots,n.$$

定理 4.2.2.3 假设 $k \geqslant 3$, PDE (4.26) 具有形式

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x,u)u_{i_1 i_2 \cdots i_k} = B_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}}(x,u,\partial u)u_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}} + h(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-2}u), \tag{4.35}$$

它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27), 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1,\ 2,\cdots,n.$$

定理 4.2.2.4 假设 $k \geqslant 3$, PDE (4.26) 具有形式

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_k}(x,u)u_{i_1 i_2 \cdots i_k} = C_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}}(x,u)u_{j_1 j_2 \cdots j_{k-1}} + h(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-2}u), \tag{4.36}$$

它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27), 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

定理 4.2.2.5 假设二阶 PDE(4.26) 具有形式

$$A_{ij}(x,u)u_{ij} = C_k(x,u)u_k + h(x,u),$$

它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27), 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

定理 4.2.2.6 假设 $k \geqslant 2$, 阶 PDE(4.26) 是齐次线性 PDE, 它拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.27), 则有

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} = 0.$$

定理 4.2.2.1~ 定理 4.2.2.5 的证明见文献 (Bluman, 1990). 关于定理 4.2.2.6 的证明, $k = 2$ 的情况见文献 (Ovsiannikov, 1962, Chapter 6; 1982, Section 27), $k > 2$ 的情况见文献 (Bluman, 1990a). PDE (4.32) 的特殊情况的进一步分类见文献 (Heredero, Olver, 1996).

对于 $n = 2$, 引入符号

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad \xi_1(x_1, x_2) = \xi(x, t), \quad \xi_2(x_1, x_2) = \tau(x, t)$$

和

$$u_1 = u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_2 = u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \eta_1^{(1)} = \eta_x^{(1)}, \quad \eta_2^{(1)} = \eta_t^{(1)}, \cdots.$$

如果 $\partial\xi/\partial u = 0$, $\partial\tau/\partial u = 0$, $\partial^2\eta/\partial u^2 = 0$, 则点对称的无穷小生成元具有形式

$$X = \xi(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t)\frac{\partial}{\partial t} + [f(x, t)u + g(x, t)]\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.37}$$

由此可知, 对于无穷小生成元 (4.37), 有 (参看 (2.123)~(2.137))

$$\eta = fu + g, \tag{4.38}$$

$$\eta_x^{(1)} = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}u + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_t, \tag{4.39}$$

$$\eta_t^{(1)} = \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}u + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial t}\right] u_x - \frac{\partial \tau}{\partial t}u_t, \tag{4.40}$$

$$\eta_{xx}^{(2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}u + \left[2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right] u_x - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}u_t + \left[f - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] u_{xx} - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}u_{xt}, \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned} \eta_{xt}^{(2)} = &\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t}u + \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x\,\partial t}\right] u_x + \left[\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x\,\partial t}\right] u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t}u_{xx} \\ &+ \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right] u_{xt} - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_{tt}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\eta_{tt}^{(2)} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}u - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}u_x + \left[2\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}\right] u_t - 2\frac{\partial \xi}{\partial t}u_{xt} + \left[f - 2\frac{\partial \tau}{\partial t}\right] u_{tt}. \tag{4.43}$$

4.2.3 例子

1. 热方程

考虑热方程

$$u_{xx} = u_t. \tag{4.44}$$

根据定理 4.2.2.6 立即可知, PDE(4.44) 拥有的点对称的无穷小生成元

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.45}$$

一定具有形式 (4.37). 现在求热方程 (4.44) 拥有的点对称的所有无穷小生成元. 对于 PDE(4.44), 对称确定方程 (4.28) 变为

$$\eta_{xx}^{(2)} = \eta_t^{(1)}, \quad 当\ u_{xx} = u_t. \tag{4.46}$$

将 (4.40) 和 (4.41) 代入 (4.46), 然后通过 (4.44) 消去 u_{xx}, 可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t}\right]u + \left[2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t}\right]u_x \\ &+ \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_t - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}u_{xt} = 0.\end{aligned} \tag{4.47}$$

对称确定方程 (4.47) 对于 $x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}$ 的所有的值一定成立. 因而, 令 u_{xt}, u_t, u_x, u 的系数以及 (4.47) 的第一个括号项为零, 获得下面的关于 $\xi(x,t), \tau(x,t), f(x,t)$, $g(x,t)$ 的含有五个确定方程的系统:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{4.48a}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \tag{4.48b}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \tag{4.48c}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4.48d}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0. \tag{4.48e}$$

PDE(4.44) 的解对应于平凡的无穷参数 Lie 点变换群 (4.30a,b) 且 $\omega(x) = g(x,t)$. 由线性偏微分方程组 (4.48a~d) 的解可得非平凡点对称. 可以证明 (4.48a~d) 的解为

$$\xi(x,t) = \kappa + \beta x + \gamma xt + \delta t, \tag{4.49a}$$

$$\tau(x,t) = \tau(t) = \alpha + 2\beta t + \gamma t^2, \tag{4.49b}$$

$$f(x,t) = -\gamma\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\delta x + \lambda, \tag{4.49c}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda$ 是六个任意参数 (Bluman, Cole, 1969). 因而, 热方程 (4.44) 拥有的点对称生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t},\quad X_4 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_5 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_6 = u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.50}$$

无穷小生成元 (4.50) 对应于作用在空间上的 6 参数 Lie 非平凡点变换群.

源于无穷小生成元 (4.50) 的 Lie 代数的交换表为

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
X_1	0	0	X_1	X_5	$-\frac{1}{2}X_6$	0
X_2	0	0	$2X_2$	$X_3 - \frac{1}{2}X_6$	X_1	0
X_3	$-X_1$	$-2X_2$	0	$2X_4$	X_5	0
X_4	$-X_5$	$-X_3 + \frac{1}{2}X_6$	$-2X_4$	0	0	0
X_5	$\frac{1}{2}X_6$	$-X_1$	$-X_5$	0	0	0
X_6	0	0	0	0	0	0

由无穷小 (4.49a,b) 可知, 无穷小生成元 (4.50) 包含作用在 (x,t) 空间上的 5 参数 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa)$ 的 Lie 点变换群

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x},\quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial t},\quad Y_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_4 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t},\quad Y_5 = t\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.51}$$

5 参数 Lie 群是 $\mathbf{R}^2$ 上含无穷小生成元 (2.169) 的 (2.168a,b) 所定义的 8 参数 Lie 射影变换群的子群.

考虑 (4.50) 中的无穷小生成元 X_4(参数 γ). 通过解一阶常微分方程组的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = x^*t^*,$$

$$\frac{\mathrm{d}t^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = (t^*)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}\varepsilon} = -\left[\frac{1}{4}(x^*)^2 + \frac{1}{2}t^*\right]u^*,$$

且 $u^*=u, x^*=x, t^*=t\ (\varepsilon=0)$. 可得相应的单参数 Lie 点变换群

$$x^* = X(x,t,u;\varepsilon) = \frac{x}{1-\varepsilon t},$$
$$t^* = T(x,t,u;\varepsilon) = \frac{t}{1-\varepsilon t},$$
$$u^* = U(x,t,u;\varepsilon) = \sqrt{1-\varepsilon t}\exp\left[-\frac{\varepsilon x^2}{4(1-\varepsilon t)}\right]u.$$

现在, 利用 4.2.1 节中的两种方法, 根据 X_4 作用下热方程 (4.44) 的不变性, 求它的不变解 $u=\Theta(x,t)$.

(1) 不变形式法. 这里, 不变曲面条件 (4.21a) 变为

$$xtu_x + t^2u_t = -\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}t\right)u. \tag{4.52}$$

相应特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xt} = \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{\mathrm{d}u}{-\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}t\right)u}.$$

特征方程的解产生 X_4 的两个不变量

$$\zeta = \frac{x}{t}, \quad v = \sqrt{t}\mathrm{e}^{x^2/4t}u.$$

因此, 不变曲面条件 (4.52) 的解由如下不变形式给出

$$\sqrt{t}\mathrm{e}^{x^2/4t}u = \phi\left(\frac{x}{t}\right),$$

或通过解该方程, 得

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}\phi(\zeta), \tag{4.53}$$

其中 $\zeta = x/t$ 是相似变量. 将 (4.53) 代入热方程 (4.44) 可知, $\phi(\zeta)$ 满足约化的 ODE

$$\phi''(\zeta) = 0.$$

从而, 源于 X_4 作用下 (4.44) 的不变性的 PDE (4.44) 的不变解为

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\left[C_1 + C_2\frac{x}{t}\right]\mathrm{e}^{-x^2/4t}, \tag{4.54}$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

(2) 直接代入法. 这里首先将不变曲面条件表示为 u_t 的可解形式

$$u_t = -\frac{x}{t}u_x - \left[\frac{x^2}{4t^2}+\frac{1}{2t}\right]u. \tag{4.55}$$

将 (4.50) 代入热方程 (4.44), 得下面 ODE

$$u_{xx} + \frac{x}{t}u_x + \left[\frac{x^2}{4t^2} + \frac{1}{2t}\right]u = 0. \tag{4.56}$$

其中 t 是参数. 参数化 ODE (4.56) 的通解为

$$u = [A(t) + B(t)x]\mathrm{e}^{-x^2/4t}, \tag{4.57}$$

其中 $A(t)$, $B(t)$ 是任意函数. 将 (4.57) 代入不变曲面条件 (4.52), 得

$$\left[\left(A'(t) + \frac{1}{2t}A(t)\right) + \left(B'(t) + \frac{3}{2t}B(t)\right)x\right]\mathrm{e}^{-x^2/4t} = 0.$$

因而有

$$A'(t) + \frac{1}{2t}A(t) = 0,$$
$$B'(t) + \frac{3}{2t}B(t) = 0,$$

其依次产生不变解 (4.54).

现在从不同于 (4.54) 的任意解 $u = \Theta(x,t)$, 求单参数 (ε) 解族 $u = \Phi(x,t;\varepsilon)$, 其源于点对称 X_4 作用下热方程 (4.44) 的不变性. 令

$$\hat{x} = X(x,t,u;\varepsilon) = \frac{x}{1-\varepsilon t},$$
$$\hat{t} = T(x,t,u;\varepsilon) = \frac{t}{1-\varepsilon t},$$
$$\hat{u} = \Theta(\hat{x},\hat{t}).$$

则有

$$u = \Phi(x,t;\varepsilon) = U(\hat{x},\hat{t},\hat{u};-\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon t}}\exp\left[\frac{\varepsilon x^2}{4(1-\varepsilon t)}\right]\Theta\left(\frac{x}{1-\varepsilon t}, \frac{t}{1-\varepsilon t}\right).$$

Lie (1881) 发现了热方程 (4.44) 的点变换群. Bluman (1967, Chapter II) 构造了热方程 (4.44) 的不变解 (Bluman and Cole, 1969, 1974, Section 2.7).

2. 非线性热传导方程

第二个例子考虑群分类问题. 特别地, 根据传导率 $K(u)$ 给出非线性热传导方程

$$u_t = (K(u)u_x)_x \tag{4.58}$$

的点对称的完全分类. 因为 PDE (4.48) 具有形式 (4.34), 根据定理 4.2.2.2 立即可知, 对于任意 $K(u)$, 点对称 (4.45) 的无穷小生成元一定具有如下形式

$$X = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

对于 PDE (4.48), 对称确定方程 (4.28) 变为

$$\eta_t^{(1)} = [K'(u)u_{xx} + K''(u)(u_x)^2]\eta + K(u)\eta_{xx}^{(2)} + 2K'(u)u_x\eta_x^{(1)}, \tag{4.59a}$$

且

$$u_t = (K(u)u_x)_x = K(u)u_{xx} + K'(u)(u_x)^2, \tag{4.59b}$$

其中 $\eta_x^{(1)}, \eta_t^{(1)}, \eta_{xx}^{(2)}$ 由 (2.123)~(2.125) 确定. 利用给定 PDE(4.59b) 从 (4.56a) 中消去, 可得关于 u_{xx}, u_{xt}, u_x 的幂的多项式, 且其对于 $x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xt}$ 的任意值一定成立. 根据 u_{xt}, $u_{xx}u_x$ 的系数, 可得

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{4.60a}$$

从而有 $\xi = \xi(x,t)$, $\tau = \tau(t)$. 用 (4.60a), 由 $u_x, u_{xx}, (u_x)^2$ 的系数分别得到

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + 2K'(u)\frac{\partial \eta}{\partial x} + K(u)\left[2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right] = 0, \tag{4.60b}$$

$$K(u)\left[\tau'(t) - 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + K'(u)\eta = 0, \tag{4.60c}$$

$$K(u)\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} + K'(u)\left[\tau'(t) - 2\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial u}\right] + K''(u)\eta = 0. \tag{4.60d}$$

这些项不包含 u_{xx}, u_{xt}, u_x, 因此可得最后的确定方程

$$K(u)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \tag{4.60e}$$

解 (4.60c) 可得 η, 然后将其代入 (4.60e), 可得

$$\xi(x,t) = \rho x^2 + \left[\frac{1}{2}\tau'(t) + \beta\right]x + \gamma(t), \quad \eta(x,t,u) = \frac{K(u)}{K'(u)}[4\rho x + 2\beta], \tag{4.61}$$

其中 ρ, β 是任意常数, $\gamma(t)$ 是 t 的任意函数. 将 (4.61) 代入确定方程 (4.60d) 可知, 如果 ρ, β 不全为零, 则传导率 $K(u)$ 必须满足 ODE

$$\left(\frac{K(u)}{K'(u)}\right)'' = 0,$$

它的解为 $K(u) = \lambda(u+\kappa)^\nu$ (且极限情况有 $K(u) = \lambda e^{\nu u}$), 其中 λ, κ, ν 是任意常数. 最后, 将 (4.61) 代入确定方程 (4.60b), 可得

$$2\gamma'(t) + \tau''(t)x + 4\rho\left[7 - 4\frac{K(u)K''(u)}{[K'(u)]^2}\right]K(u) = 0.$$

因而, 对于任意 $K(u) \neq \text{const}$, 可知 $\gamma'(t) = \tau''(t) = 0$, 进而可得 $\gamma = \text{const}, \tau(t) = \delta t + \sigma$. 因此, 存在五个可能的参数 $\beta, \rho, \gamma, \delta, \sigma$, 对任意 $K(u)$, 存在参数 γ, δ, σ, 但是参数 β, ρ 的存在性依赖 $K(u)$ 的形式. 因此有三种情况:

情况 I. $K(u)$ 任意.

这里, $\rho = \beta = 0$, 非线性热传导方程 (4.58) 拥有 3 参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.62}$$

情况 II. $K(u) = \lambda(u+\kappa)^{\nu}$.

这里, $\rho = 0$, PDE(4.48) 拥有 4 参数 Lie 点变换群和由 (4.62) 给出的无穷小生成元, 且

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{\nu}(u+\kappa)\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.63}$$

在极限情形下, 即 $K(u) = \lambda \mathrm{e}^{\nu u}$, 无穷小生成元 (4.63) 变为

$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2}{\nu}\frac{\partial}{\partial u}.$$

情况 III. $K(u) = \lambda(u+\kappa)^{-4/3}$.

PDE(4.48) 拥有 5 参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.62), (4.63) ($\nu = -4/3$) 和

$$X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 3x(u+\kappa)\frac{\partial}{\partial u}.$$

通过将 PDE(4.48) 考虑为偏微分方程组 $v = K(u)u_x,\ v_x = u_t$. Ovsiannikov(1959, 1962) 推出上面的结论. 这里所给出的分类出现在文献 (Bluman, 1967; Bluman, Cole, 1974; Ovsiannikov, 1982). Sophocleous (1992) 提出了 n 维放射对称非线性热传导方程 $u_t = x^{1-n}(x^{n-1}K(u)u_x)_x$ 的群分类问题.

3. 非齐次媒介中的波方程

对于点对称, 第三个例子考虑具有变波速 $c(x)$ 的波方程

$$u_{tt} = c^2(x)u_{xx} \tag{4.64}$$

的完全群分类.

因为 PDE(4.64) 是线性 PDE, 由定理 4.2.2.6, 它仅仅拥有无穷小生成元为形式 (4.37) 的点对称. 对称确定方程 (4.28) 为

$$\eta_{tt}^{(2)} = c^2(x)\eta_{xx}^{(2)} + 2c(x)c'(x)u_{xx}\xi,$$

且

$$u_{tt} = c^2(x)u_{xx},$$

其中 $\eta_{xx}^{(2)}$, $\eta_{tt}^{(2)}$ 分别由 (4.41) 和 (4.43) 确定 (不失一般性, 令 $g=0$). 对于任意波速 $c(x)$, 通过用给定 PDE (4.64) 消去 u_{tt}, 然后根据 $u_{xt}, u_{xx}, u_t, u_x, u$ 的无关性, 可得下面关于 $\xi(x,t), \tau(x,t), f(x,t)$ 的具有五个确定方程的系统:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - c^2(x)\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \tag{4.65a}$$

$$c(x)\left[\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + c'(x)\xi = 0, \tag{4.65b}$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - c^2(x)\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4.65c}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + c^2(x)\left[2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right] = 0, \tag{4.65d}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0. \tag{4.65e}$$

分别从 (4.65a,b) 解出 $\partial\tau/\partial x$, 和 $\partial\tau/\partial t$, 然后利用相容条件 $\partial^2\tau/\partial x\partial t = \partial^2\tau/\partial t\partial x$, 可得方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - c^{-2}(x)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}[H(x)\xi] = 0, \tag{4.66}$$

式中

$$H(x) = \frac{c'(x)}{c(x)}.$$

由 PDE(4.66) 的解和确定方程 (4.65d) 可推出

$$f(x,t) = \frac{1}{2}H(x)\xi(x,t) + S(t), \tag{4.67}$$

其中 $S(t)$ 是 t 的任意函数. 将 (4.67) 代入确定方程 (4.65c), 分别从 (4.65a,b) 解出 $\partial\xi/\partial t$ 和 $\partial\xi/\partial x$, 然后利用相容条件 $\partial^2\tau/\partial x\partial t = \partial^2\tau/\partial t\partial x$ 可得 $S(t) = \text{const} = s$. 因此可得

$$f(x,t) = \frac{1}{2}H(x)\xi(x,t) + s. \tag{4.68}$$

将 (4.68) 代入确定方程 (4.65e), 并且用确定方程 (4.65d), 有

$$H''(x)\xi + 2H'(x)\frac{\partial \xi}{\partial x} + H(x)\frac{\partial}{\partial x}(H(x)\xi) = 0,$$

或等价于

$$\frac{\partial}{\partial x}[(2H'(x) + H^2(x))\xi^2] = 0. \tag{4.69}$$

因此存在三种情况:

情况 I. $2H'(x) + H^2(x) = 0$.

这里, 容易验证

$$c(x) = (Ax + B)^2, \tag{4.70}$$

其中 A, B 是任意常数, 且 $H(x) = 2A/(Ax + B)$. 对相应 PDE (4.66) 的任意解 $\xi(x,t)$, 通过解确定方程系统 (4.65a~e), 可得函数 $\tau(x,t), f(x,t)$ 为

$$\tau(x,t) = \int \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} - H(x)\xi\right] \mathrm{d}t, \tag{4.71a}$$

$$f(x,t) = \frac{A}{Ax + B}\xi(x,t). \tag{4.71b}$$

当波速由 (4.70) 给定时, 由 PDE (4.66) 的任意解 $\xi(x,t)$ 和 (4.71a,b) 确定的函数集 $\{\xi, \tau, f\}$ 对应于非平凡无穷参数 Lie 点变换群作用下波方程 (4.64) 的不变性. 可以证明对于 $A \neq 0$, 通过点变换 (Bluman, 1983)

$$u_{tt} = (Ax + B)^4 u_{xx}, \tag{4.72}$$

波方程 $w_{XT} = 0$ 能够变换为如下波方程

$$X = [Ax + B]^{-1} + At,$$
$$T = [Ax + B]^{-1} - At,$$
$$w = [Ax + B]^{-1} u.$$

因而, (4.72) 的通解为

$$u = (Ax + B)[F(X) + G(T)],$$

式中 $F(X), G(T)$ 是两个它们代表的变量的任意可微函数.

情况 II. $2H'(x) + H^2(x) \neq 0$, $\xi(x,t) \neq 0$.

这种情况下, 由 (4.69) 可知, $\xi(x,t)$ 可以表示为分离的形式

$$\xi(x,t) = \alpha(x)\beta(t), \tag{4.73}$$

其中

$$\alpha^2(x) = \rho[2H'(x) + H^2(x)]^{-1}, \tag{4.74}$$

$\rho, \beta(t)$ 是常数, 是待定的函数. 将 (4.68) 和 (4.73) 代入确定方程 (4.65d), 有

$$\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} = \frac{c^2(x)[\alpha'(x) - H(x)\alpha(x)]'}{\alpha(x)} = \mathrm{const} = \sigma^2, \tag{4.75}$$

式中 σ 是实或复常数. 我们分两种子情况 $\sigma = 0$, $\sigma \neq 0$.

情况 IIa. $\sigma = 0$.

这里, 波速 $c(x)$ 一定满足四阶 ODE

$$[\alpha'(x) - H(x)\alpha(x)]' = 0. \tag{4.76}$$

相应地, 由 (4.75) 可得

$$\beta(t) = p + qt,$$

其中 p, q 是任意常数. 将 (4.68) 和 (4.73) 代入确定方程 (4.65e), 可得方程

$$[\alpha(x)H(x)]'' = 0. \tag{4.77}$$

波速 $c(x)$ 一定满足 (4.67), (4.74) 和 (4.77). 因此可得

$$\alpha(x) = Bx^2 + Cx + D,$$

$$\alpha(x)H(x) = A + 2Bx,$$

$$\rho = 4BD + A^2 - 2AC,$$

其中 A, B, C, D 是任意常数. 从而有

$$\frac{c'(x)}{c(x)} = H(x) = \frac{A + 2Bx}{Bx^2 + Cx + D},$$

即

(i) $c(x) = [Bx^2 + Cx + D]\exp[(A - C)\int[Bx^2 + Cx + D]^{-1}\mathrm{d}x.$

由 (4.73) 和 (4.68) 可分别得相应的 $\xi(x,t)$ 和 $f(x,t)$; 由 (4.65a,b) 可得 $\tau(x,t)$. 这导致相应波方程 (4.64) 拥有的 4 参数 Lie 点变换群. 无穷小生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = [Bx^2 + Cx + D]\frac{\partial}{\partial x} + [C - A]t\frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{1}{2}A + Bx\right]u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3 = [Bx^2 + Cx + D]t\frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{1}{2}(C - A)t^2 + \int\frac{Bx^2 + Cx + D}{c^2(x)}\mathrm{d}x\right]\frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{1}{2}A + Bx\right]tu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

相应的 Lie 代数的非零换位子为

$$[X_1, X_2] = (C - A)X_1, \quad [X_1, X_3] = X_2, \quad [X_2, X_3] = (C - A)X_3.$$

可以证明, 当 $A \neq C$. 时, 具有基生成元 X_1, X_2, X_3 的 Lie 代数同构于 Lie 代数 SO(2,1). 当 $A = C$ 时, 有 $c(x) = Bx^2 + Cx + D$.

容易证明, 在相差任意关于 x 的尺度和平移变换下, 由 (i) 给定的波速 $c(x)$ 等价于下面五种正则形式中的一种:

(a) $c(x)=x^A(B=D=0,C=1)$;

(b) $c(x)=\mathrm{e}^x(B=C=0,A=D=1)$;

(c) $c(x)=(1+x^2)\mathrm{e}^{A\arctan x}(C=0,\ B=D=1)$;

(d) $c(x)=(1+x)^{1+(A/2)}(1-x)^{1-(A/2)}(C=0,B=-1,\ D=1)$;

(e) $c(x)=x^2\mathrm{e}^{1/x}(C=D=0,\ A=-1,\ B=1)$.

现在列举波速 (i) 的特殊情况和相应波方程 (4.64) 拥有的无穷小生成元 (常数 A, B, C, D 重新被定义).

(ii) $c(x)=(Ax+B)^C,\quad C\neq 0,\,1,\,2$.

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=(Ax+B)\frac{\partial}{\partial x}+A(1-C)t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}ACu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3=(Ax+B)t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[A(1-C)t^2+\frac{(Ax+B)^{2-2C}}{A(1-C)}\right]\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}ACtu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_4=u\frac{\partial}{\partial u}.$$

换位子表可由 (i) 的换位子中用 $A(1–C)$ 代替 $(C–A)$ 得到.

(iii) $c(x)=Ax+B$.

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=(Ax+B)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}Au\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3=(Ax+B)t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\log(Ax+B)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}Atu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=u\frac{\partial}{\partial u}.$$

相应 Lie 代数的非零换位子为 $[X_1,X_3]=X_2$, $[X_2,X_3]=X_1$.

(iv) $c(x)=A\mathrm{e}^{Bx}$.

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x}-Bt\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}Bu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_3=At\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{2}[ABt^2+(AB)^{-1}\mathrm{e}^{-2Bx}]\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{2}ABtu\frac{\partial}{\partial u},\quad X_4=u\frac{\partial}{\partial u}.$$

换位子表可由 (i) 的换位子中用 $–AB$ 代替 $C–A$ 得到.

情况 IIb. $\sigma\neq 0$.

这里, (4.75) 导致波速 $c(x)$ 满足四阶 ODE

$$c^2(x)[\alpha'(x)-H(x)\alpha(x)]'=\sigma^2\alpha(x),\tag{4.78}$$

式中 $H(x)=c'(x)/c(x)$ 和 $\alpha(x)$ 由 (4.74) 确定 (不失一般性, (4.74) 中 $\rho=1$). 可以证明, 如果 $c(x)$ 满足 ODE (4.78), 那么相应的波方程 (4.64) 拥有一个 4 参数 Lie

点变换群, 且它的无穷小生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = e^{\sigma t}\left[\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^{-1}(\alpha'(x) - H(x)\alpha(x))\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha(x)H(x)u\frac{\partial}{\partial u}\right],$$

$$X_3 = e^{-\sigma t}\left[\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x} - \sigma^{-1}(\alpha'(x) - H(x)\alpha(x))\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\alpha(x)H(x)u\frac{\partial}{\partial u}\right], \quad X_4 = u\frac{\partial}{\partial u}.$$

相应 Lie 代数的非零换位子为

$$[X_1, X_2] = \sigma X_2, \quad [X_1, X_3] = -\sigma X_3,$$
$$[X_2, X_3] = 2\sigma^{-1}[(\alpha'(x) - H(x)\alpha(x))^2 - (\sigma\alpha(x)/c(x))^2]X_1.$$

立即可知

$$(\alpha'(x) - H(x)\alpha(x))^2 - (\sigma\alpha(x)/c(x))^2 = \text{const} = K. \tag{4.79}$$

因此, (4.79) 是 ODE (4.78) 的求积分, 即换位子 $[X_2, X_3]$ 产生 ODE (4.78) 的首次积分! 关于波速 $c(x)$ 的三阶 ODE (4.79) ((4.75) 导致它是三阶的 ODE) 拥有两个点对称. 利用第 3 章的方法, 它可以约化为一阶 ODE. 如果约化的 ODE 是可解的, 则 ODE (4.79) 的通解通过三个求积分来得到 (当 σ 是虚的, 则 X_2, X_3 的适当的线性换位子产生相应的无穷小生成元). 当 $K \neq 0$ 时, 可以证明具有基生成元 X_1, X_2, X_3 的 Lie 代数同构于 SO(2,1) 的 Lie 代数.

情况 III. $\xi = 0$.

由确定方程 (4.65a~e) 立即可知, $\tau = \text{const} = r$, $f = \text{const} = s$, 因而这种情况下的波方程 (4.64) 仅仅拥有 t 的平移和 u 的尺度变换. 特别地, 如果对任意常数 ρ, σ, K, 波速 $c(x)$ 不满足 (4.74) 和 (4.79), 则波方程 (4.64) 仅仅拥有 2 参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为 $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, X_2 = u\dfrac{\partial}{\partial u}$.

总之, 我们得到下面的定理:

定理 4.2.3.1 对于某些常数 ρ, σ, K, 当波速 $c(x)$ 是系统 (4.74) 和 (4.79) 的解时, 波方程 (4.64) 拥有 4 参数 Lie 点变换群. 这个群变为无穷参数群, 当且仅当 $c(x) = (Ax + B)^C$, $C = 0, 2$. 对于波速 $c(x)$ 的所有其他情况, 波方程 (4.64) 仅仅拥有 2 参数 Lie 关于 t 的平移和 u 的尺度变换群. 波方程 (4.64) 的群分类参看文献 (Bluman, Kumei, 1987). 该文章还包括相应不变解.

4. *Biharmonic 方程*

最后一个例子, 求四阶 Biharmonic 方程

$$\Delta u = \nabla^2\nabla^2 u = 0$$

拥有的 Lie 点变换群, 其中 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. 该方程等价于 PDE

$$u_{yyyy} = -2u_{xxyy} - u_{xxxx}. \tag{4.80}$$

根据定理 4.2.2.6 ($x_1 = x,\ x_2 = y$), PDE (4.80) 拥有非平凡点对称, 它的无穷小生成元具有形式

$$X = X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + f(x,y)u\frac{\partial}{\partial u},$$

其中对称确定方程 (4.28) 变为

$$\eta^{(4)}_{yyyy} = -2\eta^{(4)}_{xxyy} - \eta^{(4)}_{xxxx}, \tag{4.81a}$$

且

$$u_{yyyy} = -2u_{xxyy} - u_{xxxx}. \tag{4.81b}$$

则直接推得下面的关于 $X(x,y), Y(x,y), f(x,y)$ 的确定方程组

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \tag{4.82a}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \tag{4.82b}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0, \tag{4.82c}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial y} - 4\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0, \tag{4.82d}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y} - 3\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0, \tag{4.82e}$$

$$2\frac{\partial f}{\partial y} - 3\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0, \tag{4.82f}$$

$$3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\left[\frac{\partial^3 X}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 X}{\partial x\,\partial y^2}\right] = 0, \tag{4.82g}$$

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^3 X}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 X}{\partial x^2\,\partial y} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x\,\partial y^2} = 0, \tag{4.82h}$$

$$3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\left[\frac{\partial^3 Y}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 Y}{\partial x^2\,\partial y}\right] = 0, \tag{4.82i}$$

$$4\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right] - \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 X}{\partial x^2\,\partial y^2} - \frac{\partial^4 X}{\partial y^4} = 0, \tag{4.82j}$$

$$4\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right] - \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^4 Y}{\partial x^2\,\partial y^2} - \frac{\partial^4 Y}{\partial y^4} = 0, \tag{4.82k}$$

$$\Delta f = 0. \tag{4.82l}$$

由确定方程 (4.82a,b) 可知

$$\nabla^2 X = 0, \quad \nabla^2 Y = 0. \tag{4.83}$$

将 (4.83) 代入确定方程 (4.82c,f) 可得

$$f(x,y) = \frac{\partial X}{\partial x} + s, \quad s = \text{const.} \tag{4.84}$$

那么确定方程 (4.82d,e) 也成立. 再将 (4.84) 和 (4.82a,b) 代入确定方程 (4.82g~i), 可知 X 和 Y 的三阶导数为零. 从而剩余确定方程 (4.82j~l) 自动满足. 因此得到

$$X(x,y) = \alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2 + \delta_1 x + \kappa_1 y + \rho_1, \tag{4.85a}$$

$$Y(x,y) = \alpha_2 x^2 + \beta_2 xy + \gamma_2 y^2 + \delta_2 x + \kappa_2 y + \rho_2, \tag{4.85b}$$

以及重新定义 (4.84) 中的常数 s, 得

$$f(x,y) = 2\alpha_1 x + \beta_1 y + s, \tag{4.85c}$$

其中所指示的常数是待定的. 由确定方程 (4.82a,b) 可知

$$2\alpha_2 x + \beta_2 y + \delta_2 = -\beta_1 x - 2\gamma_1 y - \kappa_1, \quad 2\alpha_1 x + \beta_1 y + \delta_1 = \beta_2 x + 2\gamma_2 y + \kappa_2.$$

因而有

$$\beta_1 = -2\alpha_2, \quad \gamma_2 = -\alpha_2, \quad \beta_2 = 2\alpha_1, \quad \gamma_1 = -\alpha_1, \quad \kappa_2 = \delta_1, \quad \kappa_1 = -\delta_2.$$

从而重新定义常数 $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2, s$, 可知, Biharmonic 方程 (4.80) 拥有的点对称生成元

$$X = X(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x,y)\frac{\partial}{\partial y} + f(x,y)u\frac{\partial}{\partial u}$$

由如下的无穷小给定

$$X(x,y) = \alpha_1(x^2 - y^2) - 2\alpha_2 xy + \alpha_3 x - \alpha_4 y + \alpha_5, \tag{4.86a}$$

$$Y(x,y) = 2\alpha_1 xy + \alpha_2(x^2 - y^2) + \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_6, \tag{4.86b}$$

$$f(x,y) = 2\alpha_1 x - 2\alpha_2 y + \alpha_7. \tag{4.86c}$$

留作习题 4.2.5, 可以证明, 根据复变量 $z = x + iy$, 这些无穷小生成元确定 7 参数 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_7)$ 的 Lie 点变换群

$$z^* = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{4.87a}$$

$$u^* = \lambda \left| \frac{dz^*}{dz} \right| u, \tag{4.87b}$$

其中 a, b, c, d 是任意复常数以致于 $ad - bc \neq 0$, λ 是任意实常数. 方程 (4.87a) 是广义的 Mobius(双线性) 变换. 这个例子参看文献 (Bluman, Gregory, 1985).

Reid(1990,1991) 证明, 不需要求解确定方程, 就可以确定给定 PDE 的点对称的群分类问题的不同情况. 基于移动结构, Lisle(1992) 表明如何解包含两个或更多的分类函数的复杂的分类问题, 他修正了 Reid 的算法. 根据两个分类函数: 扩散 $D(u)$ 和对流 $K(u)$, 关于标量扩散对流方程

$$u_t = (D(u)u_x - K(u))_x$$

的点对称, 并应用该方法给出了完全的群分类.

对于各种函数 $g(x), f(x)$ 和常数 p, q, r, Gandarias(1996) 考虑了多孔介质方程 $u_t = (u^p)_{xx} + g(x)u^q + f(x)(u^r)_x$ 的点对称.

习　题　4.2

1. 考虑热方程 (4.44).

(a) 利用 4.2.1 节中的两种方法, 根据 X_5 作用下 (4.44) 的不变性, 求 (4.44) 的不变解.

(b) 对于任意解 $u = \Theta(x, t)$, 不是有关 X_5 作用下不变性的不变解, 求所产生 PDE(4.44) 的单参数解族 $\Phi(x, t; \varepsilon)$.

2. (a) 对于热方程 (4.44) 的哪些解 $u = \Theta(x, t)$, 无穷小生成元 $X_1, X_2, \cdots, X_6$, 产生 (4.44) 的 6 参数解族 $u = \Phi(x, t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_6)$?

(b) 确定 $\Phi(x, t; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_6)$.

3. 考虑波方程 $u_{tt} = \mathrm{e}^{2x} u_{xx}$.

(a) 求无穷小生成元:

(i) $X_2 + sX_1$;

(ii) $X_2 + sX_1$

产生的不变解. 其中 s 是任意常数.

(b) 给定该波方程的任意解 $u = \Theta(x, t)$, 寻找由 X_1, X_2, X_3, X_4 产生的 4 参数解族. $\Theta(x, t)$ 必须满足什么条件?

4. 证明: (4.49a~c) 产生确定方程组 (4.48a~d) 的通解.

5. 证明: (4.87a,b) 定义了 7 参数 Lie 点变换群, 且无穷小由 (4.86a~c) 确定.

6. 考虑 n 维空间中的热方程.

(a) 求 $u_t = u_{xx} + u_{yy} (n = 2)$ 拥有的 9 参数 Lie 点变换群.

(b) 求 $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}(n=3)$ 拥有的 13 参数 Lie 点变换群.

(c) 推广到 n 维热方程 $u_t = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}$.

7. 考虑轴对称波方程

$$u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r. \tag{4.88}$$

(a) 证明: PDE (4.88) 的 Lie 点变换群的无穷小生成元为

$$X_1 = r\frac{\partial}{\partial r} + t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = 2rt\frac{\partial}{\partial r} + (r^2+t^2)\frac{\partial}{\partial t} - tu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_3 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

(b) 求 (4.88) 由无穷小生成元

(i) $X_1 + sX_3$;

(ii) $X_2 + sX_3$

产生的不变解, 其中 s 是任意常数.

8. 考虑非线性波方程

$$u_{tt} = c^2(u)u_{xx}, \quad c(u) \neq \text{const}. \tag{4.89}$$

证明: 按照无穷小生成元, (4.89) 的点对称不变群分类为

(a) $c(u)$ 任意,

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}.$$

(b) $c(u) = A(u+B)^C, A, B, C$ 为任意常数,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 = Cx\frac{\partial}{\partial x} + (u+B)\frac{\partial}{\partial u}.$$

(c) $c(u) = A(u+B)^2, A, B$ 为任意常数,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4(C=2), \quad X_5 = x^2\frac{\partial}{\partial x} + x(u+B)\frac{\partial}{\partial u}.$$

9. 考虑 $n \geqslant 3$ 维空间中的 Laplace 方程

$$\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j} = 0. \tag{4.90}$$

(a) 证明: (4.90) 拥有的 $\left[1 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right]$ 参数 Lie 点变换群具有如下的无穷小生成元

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + f(x)u\frac{\partial}{\partial u},$$

且无穷小为

$$\xi_j(x) = \alpha_j + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk} x_k - \gamma_j \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 + 2x_j \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k + \lambda x_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

$$f(x) = (2-n) \sum_{k=1}^{n} \gamma_k x_k + \delta,$$

其中$\alpha_j, \delta, \lambda, \gamma_j, \beta_{jk} = -\beta_{kj}, j, k = 1, 2, \cdots, n$ 是 $1 + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个任意常数. 对应于 $\delta = 0$ 的子群称为正则群. 可以证明该正则群同构于 SO$(n+1, 1)$ (Bluman, 1967).

(b) 当 $n = 2$ 时, 求 (4.90) 所拥有的全局 7 参数 Lie 点变换群.

10. 考虑非线性扩散方程

$$u_{xx} = (u_x)^2 u_t. \tag{4.91}$$

(a) 求 (4.91) 拥有的无穷参数 Lie 点变换群;

(b) 比较 (4.91) 和线性热方程 (4.44) 拥有的无穷小生成元的 Lie 代数.

11. 求 Burgers 方程 $u_t = u_{xx} - uu_x$ 拥有的 5 参数 Lie 点变换群. Edwards 和 Broadbridge (1995) 考虑了 2 维和 3 维 Burgers 方程 $u_t = \nabla^2 u - uu_x$ 的点对称和相应的不变解.

12. 求 KdV 方程

$$u_{xxx} + uu_x + u_t = 0 \tag{4.92}$$

拥有的 4 参数 Lie 点变换群.

13. 寻找柱 KdV 方程

$$u_{xxx} + uu_x + \frac{1}{2t}u + u_t = 0. \tag{4.93}$$

拥有的 4 参数 Lie 点变换群 (Bluman, Kumei, 1989b, Chapter 6)

14. 流函数方程

$$\nabla^2 u_t + u_y \nabla^2 u_x - u_x \nabla^2 u_y = \nu \nabla^4 u \tag{4.94}$$

描述了不能压缩的二维常性质流体的运动, 其中 $u(x, y, t)$ 是流动的流函数, $\nu =$ const 是动黏度, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

(a) 若 $\nu = 0$, 则证明 (4.94) 拥有的无穷 Lie 点变换群可由如下无穷小生成元

$$X = X(x, y, t)\frac{\partial}{\partial x} + Y(x, y, t)\frac{\partial}{\partial y} + T(t)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, y, t, u)\frac{\partial}{\partial u}$$

表示, 且无穷小为

$$
\begin{aligned}
&X(x,y,t)=ax+by+cyt+f_1(t),\\
&Y(x,y,t)=ay-bx-cxt+f_2(t),\\
&T(t)=ht+k,\\
&\eta(x,y,t,u)=(2a-h)u+\frac{1}{2}c(x^2+y^2)+f_1'(t)y-f_2'(t)x+f_3(t),
\end{aligned}
$$

这里 a,b,c,h,k 是任意常数, $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 是时间坐标 t 的任意可微函数.

(b) 若 $\nu\neq 0$, 则证明除了 $h=2a$, 所拥有的群与 (a) 相同 (Cantwell, 1978).

15. 考虑非线性反应扩散方程

$$u_t=u_{xx}+F(u). \tag{4.95}$$

对任意反应函数 $F(u)$, 可以证明 PDE(4.95) 仅仅在 x 和 t 的平移变换作用下是不变的. 证明: (4.95) 拥有 3 参数 Lie 点变换群, 只要在 u 的平移变换条件下, $F(u)$ 由三种形式中的任一种确定: $Au^B, u(A+B\log u)$, Ae^{Bu}, 这里 A 和 B 是任意常数 (Liu, Fang, 1986). 更一般的形式见文献 (Galaktionov et al., 1988).

16. 考虑非线性波方程

$$u_{tt}=(c^2(u)u_x)_x, \tag{4.96}$$

根据无穷小生成元, 证明: 关于点对称, (4.98) 的不变性的群分类为

(a) $c(u)$ 任意,

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}+t\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=\frac{\partial}{\partial x},\quad X_3=\frac{\partial}{\partial t}.$$

(b) $c(u)=A(u+B)^C$, 其中 A,B,C 为任意常数,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\quad X_4=Cx\frac{\partial}{\partial x}+(u+B)\frac{\partial}{\partial u}.$$

(c) $c(u)=A(u+B)^{-2}$, 其中 A,B 为任意常数,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4(C=-2),\quad X_5=t^2\frac{\partial}{\partial t}+t(u+B)\frac{\partial}{\partial u}.$$

(d) $c(u)=A(u+B)^{-2/3}$, 其中 A, B 为任意常数,

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\left(C=-\frac{2}{3}\right),\quad X_5=x^2\frac{\partial}{\partial x}-3x(u+B)\frac{\partial}{\partial u}$$

((Ames, Lohner, Adams, 1981). PDE (4.96) 的群分类, 其中 $c(u)$ 替换为 $c(x,u)$ 的情形曾被 Torrisi 和 Valenti (1985) 研究过. 如下形式的高维波方程 $u_{tt}=(f(u)u_x)_x+(g(u)u_y)_y+(h(u)u_z)_z$ 由 Baikov, Gazizov, Ibragimov (1990, 1991) 给出).

17. 证明：二维非线性 Schrödinger 方程

$$u_{xx} + u_{yy} + r|u^2|u = \mathrm{i}u_t, \quad r = \mathrm{const}$$

拥有 8 参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (Tajiri, 1983)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_5 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\mathrm{i}xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_7 = t\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2}\mathrm{i}yu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_8 = xt\frac{\partial}{\partial x} + yt\frac{\partial}{\partial y} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left[t + \frac{1}{4}\mathrm{i}(x^2 + y^2)\right]u\frac{\partial}{\partial u}.$$

18. 证明：源于 Rieman 几何的 PDE：$u_{xx} + u_{yy} + (\mathrm{e}^u)_{zz} = 0$ 拥有

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

以及无穷参数 Lie 点变换群, 由如下无穷小生成元确定

$$X_\infty = \alpha(x,y)x\frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x,y)y\frac{\partial}{\partial y} - 2\alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial u},$$

其中 $\nabla^2\alpha(x,y) = 0$(见文献 (Drew, Kloster, Gegenberg, 1989), 他们也考虑了柱对称情形).

19. 证明：拥有由 6 个无穷小生成元 (4.53) 给定的热方程的群的最一般的二阶标量 PDE

$$u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, u_{xt}, u_{tt})$$

具有如下形式

$$u_{xx} = u_t + \frac{(u_x)^2}{u}K(\varsigma),$$

其中 $\varsigma = \dfrac{u^2u_{xt} - 3uu_tu_x}{(u_x)^3}$. $K(\varsigma)$ 是一阶 ODE $\left(K - \dfrac{3}{2}\varsigma - 3\right)K' + K = 0$ 的任意解. 求该一阶 ODE 拥有的点对称, 并且证明它的通解为

$$\frac{K^3}{(2K - 2 - \varsigma)} = \mathrm{const}.$$

20. 考虑非线性二阶 PDE

$$u_x + 2uu_z + zu_{xz} + z^2u_{yz} + zuu_{zz} = 0,$$

其源于拥有点形式的伴随对称的 ODEs 的分类 (见 3.7.5 节). 求该 PDE 所拥有的 2 参数 Lie 尺度群以及相应的不变解.

4.3 偏微分方程组的不变性

考虑具有 N $(N>1)$ 个偏微分方程组成的系统

$$F^{\mu}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0,\quad \mu=1,2,\cdots,N, \tag{4.97}$$

其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 个自变量, $u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$ 是 m 个因变量.

定义 4.3.1 单参数 Lie 点变换群

$$x^*=X(x,u;\varepsilon), \tag{4.98a}$$

$$u^*=U(x,u;\varepsilon), \tag{4.98b}$$

使得偏微分方程组 (4.97) 保持不变, 即它是 (4.97) 的点对称, 当且仅当由 (2.134 a~d), (2.130)~(2.132) 给定的它的 k 阶延拓, 使得 (4.97) 定义的空间 $(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)$ 上的 N 个曲面保持不变.

类似于标量 PDE 的情况, 容易证明下面的定理 (本节剩余部分, 假设重复指标表示求和).

定理 4.3.1(偏微分方程组不变性的无穷小准则) 令

$$X=\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \tag{4.99}$$

是 Lie 点变换群 (4.98a,b) 的无穷小生成元,

$$\begin{aligned}X^{(k)}=&\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^{\nu}(x,u)\frac{\partial}{\partial u^{\nu}}+\eta_i^{(1)\nu}(x,u,\partial u)\frac{\partial}{\partial u_i^{\nu}}+\cdots\\&+\eta_{i_1i_2\cdots i_k}^{(k)\nu}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)\frac{\partial}{\partial u_{i_1i_2\cdots i_k}^{\nu}}\end{aligned} \tag{4.100}$$

是 (4.99) 的 k 阶延拓的无穷小生成元, 其中 $\eta_i^{(1)\nu}$ 和 $\eta_{i_1i_2\cdots i_j}^{(j)\nu}$ 分别由 (2.135) 和 (2.136) 确定, 其中

$$\begin{aligned}&\xi(x,u)=(\xi_1(x,u),\xi_2(x,u),\cdots,\xi_n(x,u)),\\&\eta(x,u)=(\eta^1(x,u),\eta^2(x,u),\cdots,\eta^m(x,u)),\\&\nu=1,2,\cdots,m,\ i_j=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,k,\end{aligned}$$

则偏微分方程组 (4.97) 拥有单参数 Lie 点变换群 (4.98a,b), 当且仅当对于每个 $\sigma=1,2,\cdots,N$, 有

$$X^{(k)}F^{\sigma}(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0 \tag{4.101}$$

且 u 满足 (4.97)

证明留作习题 4.3.1.

注意, 不变性准则 (对称确定方程组 (4.101)) 包括将 N 个 PDEs (4.97) 及它们的微分结果代入由 (4.101) 的每个确定方程后所得到的结果.

4.3.1 不变解

考虑偏微分方程组 (4.97), 其拥有单参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.99). 假设 $\xi(x,u)\neq 0$.

定义 4.3.1.1 $u=\Theta(x)$ 是偏微分方程组 (4.97) 的不变解, 其源于具有无穷小生成元 (4.99) 的点对称, 且分量 $u^\nu=\Theta^\nu(x)$, $\nu=1,2,\cdots,m$ 当且仅当

(i) $u^\nu=\Theta^\nu(x)$ 为 (4.99) 的不变曲面, 对于每个 $\nu=1,2,\cdots,m$;

(ii) $u=\Theta(x)$ 是 (4.97) 的解.

由此可知, $u=\Theta(x)$ 是偏微分方程组 (4.97) 的不变解, 其源于 Lie 点变换群作用下它的不变性当且仅当 $u=\Theta(x)$ 满足

(i) $X(u^\nu-\Theta^\nu(x))=0$ 当 $u=\Theta(x)$, $\nu=1,2,\cdots,m$, 即

$$\xi_i(x,\Theta(x))\frac{\partial\Theta^\nu(x)}{\partial x_i}=\eta^\nu(x,\Theta(x)),\quad \nu=1,2,\cdots,m; \tag{4.102}$$

(ii) $F^\mu(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0, u=\Theta(x)$, $\mu=1,2,\cdots,N$, 即

$$F^\mu(x,\Theta(x),\partial\Theta(x),\partial^2\Theta(x),\cdots,\partial^k\Theta(x))=0,\quad \mu=1,2,\cdots,N, \tag{4.103}$$

其中 $\partial^j\Theta(x)$ 表示 $\partial^j\Theta^\nu(x)/\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_j},\nu=1,2,\cdots,m,i_j=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,k$.

方程 (4.102) 是偏微分方程组 (4.97) 不变解的不变曲面条件, 其源于 Lie 点变换群 (4.99) 作用下它的不变性. 正如标量 PDE 的情况, 不变解可以由两种程序来确定.

(1) 不变形式法. 这里通过显式地求解关于 $u=\Theta(x)$ 的特征方程

$$\frac{dx_1}{\xi_1(x,u)}=\frac{dx_2}{\xi_2(x,u)}=\cdots=\frac{dx_n}{\xi_n(x,u)}=\frac{du^1}{\eta^1(x,u)}=\frac{du^2}{\eta^2(x,u)}=\cdots=\frac{du^m}{\eta^m(x,u)} \tag{4.104}$$

得到不变曲面条件 (4.102) 的解. 如果

$$y_1(x,u),y_2(x,u),\cdots,y_{n-1}(x,u),v^1(x,u),v^2(x,u),\cdots,v^m(x,u)$$

是 $n+m-1$ 个泛函独立的常数, 其源于求解含 $n+m-1$ 个一阶 ODEs 的系统 (4.104) 且 Jacobi 行列式 $\partial(v^1,v^2,\cdots,v^m)/\partial(u^1,u^2,\cdots,u^m)\neq 0$, 则偏微分方程组

(4.102) 的通解 $u = \Theta(x)$ 可由不变形式隐式给出

$$v^\nu(x,u) = \Phi^\nu(y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u)), \tag{4.105}$$

其中 Φ^ν 是 $y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u)$, $\nu = 1, 2, \cdots, m$ 的任意可微函数. 注意

$$y_1(x,u), y_2(x,u), \cdots, y_{n-1}(x,u), v^1(x,u), v^2(x,u), \cdots, v^m(x,u)$$

是 (4.99) 的 $n+m-1$ 个泛函独立的群不变量, 因而是 Lie 点变换群 (4.98a,b) 的 $n+m-1$ 个正则坐标. 令 $y_n(x,u)$ 是第 $(n+m)$ 个正则坐标且满足

$$Xy_n = 1.$$

如果根据自变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 和因变量 $v^1, v^2, \cdots, v^m$, 偏微分方程组 (4.97) 可以变换为一个偏微分方程组, 则所得到的偏微分方程组拥有单参数 Lie 变换群

$$\begin{aligned} &y_i^* = y_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ &y_n^* = y_n + \varepsilon, \\ &v^{*\nu} = v^\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

因而, 变量 y_n 并不显式地出现在所得到偏微分方程组中, 从而所得到的偏微分方程组拥有 (4.105) 形式的解. 结果, 偏微分方程组 (4.97) 具有不变解, 可由不变形式 (4.105) 隐式地给出. 通过求解约化的具有 $n-1$ 个自变量 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 和 m 个因变量 $v^1, v^2, \cdots, v^m$ 的微分方程组可获得那样的解. 变量 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ 共同称为相似变量. 将不变形式 (4.105) 代入给定偏微分方程组 (4.97) 可得约化的微分方程组. 假设这个代入并不导致奇异微分方程. 注意如果典型情况 $\partial\xi/\partial u \equiv 0$, 则 $y_i = y_i(x)$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$. 如果 $n = 2$, 则约化的微分方程组是常微分方程组, 且用 $\zeta = y_1$. 表示相似变量.

(2) 直接代入法. 如果不能够显式地求解不变曲面条件 (4.102), 即特征方程 (4.104), 那么这个直接代入法是必须的. 假设 $\xi_n(x,u) \neq 0$. 则一阶偏微分方程组 (4.102) 可以写为

$$\frac{\partial u^\nu}{\partial x_n} = \frac{\eta^\nu(x,u)}{\xi_n(x,u)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i(x,u)}{\xi_n(x,u)} \frac{\partial u^\nu}{\partial x_i}, \quad \nu = 1, 2, \cdots, m. \tag{4.106}$$

由 (4.106) 和它的微分结果可知, 关于 x_n 的 u 的导数中的任意项可以用 x, u, 和 u 关于 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的导数来表示. 从而, 对于 (4.97) 中所有包含关于 x_n 的 u 的导数, 直接将 (4.106) 和它的微分结果代入给定的偏微分方程组 (4.97), 可得至多具有阶的约化微分方程, 其包含 m 因变量 $u^1, u^2, \cdots, u^m, n-1$ 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 和参数 x_n. 该约化的微分方程的任意解定义了偏微分方程组 (4.97) 的不变解, 该解

是由含无穷小生成元 (4.99) 的 Lie 点变换群作用下的不变性得到的, 假如不变曲面条件 (4.102) 或等价地, 给定偏微分方程组 (4.97) 本身也成立. 如果 $n=2$, 约化微分方程组是常微分方程组, 出现在该常微分方程组通解中的常数是参数 x_n 的任意函数. 通过将这个通解代入不变曲面条件 (4.102) 或给定偏微分方程组 (4.97), 可以确定这些任意函数.

4.3.2　偏微分方程组对称的确定方程

考虑偏微分方程组 (4.97), 且对于某些 $\nu_\mu=1,2,\cdots,m$, 根据 u^{ν_μ} 的一些特殊 ℓ_μ 阶偏导数, 它的每个 PDE 具有可解形式

$$u^{\nu_\mu}_{i_1 i_2\cdots i_{\ell_\mu}}=f^\mu(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u), \tag{4.107}$$

其中对于每个 $\mu=1,2,\cdots,N$, $f^\mu(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)$ 并不显式地依赖任一分量 $u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2\cdots i_{\ell_\mu}}$, $\sigma=1,2,\cdots,N$, 根据定理 4.3.1 可知, 偏微分方程组 (4.107) 拥有点对称

$$X=\xi_i(x,u)\frac{\partial}{\partial x_i}+\eta^\nu(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\nu}, \tag{4.108}$$

且 (4.108) 的 k 阶延拓由 (4.100) 确定, 当且仅当

$$\eta^{(\ell_\mu)\nu_\mu}_{i_1 i_2\cdots i_{\ell_\mu}}=\xi_j\frac{\partial f^\mu}{\partial x_j}+\eta^\nu\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu}+\eta^{(1)\nu}_j\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu_j}+\cdots+\eta^{(k)\nu}_{j_1 j_2\cdots j_k}\frac{\partial f^\mu}{\partial u^\nu_{j_1 j_2\cdots j_k}},\quad \mu=1,2,\cdots,N, \tag{4.109a}$$

且

$$u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2\cdots i_{\ell_\sigma}}=f^\sigma(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u),\quad \sigma=1,2,\cdots,N. \tag{4.109b}$$

容易证明 $\eta^{(p)\nu}_{j_1 j_2\cdots j_p}$ 是 $\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^p u$ 的一个多项式, 且系数关于 $\xi(x,u)$, $\eta(x,u)$ 的分量以及它们的直到 p 阶导数是线性齐次的. 因而 (4.109a) 关于 ξ 和 η 是线性的. 正如给定的标量 PDE 情况, 对称确定方程组 (4.109a,b) 关于 ξ 和 η 是线性齐次偏微分方程组. 首先, 通过将 (4.109b) 和它的微分结果代入 (4.109a), 则可以消去 (4.109a) 中分量 $u^{\nu_\sigma}_{i_1 i_2\cdots i_{\ell_\sigma}}$ 和它们的微分结果 $\sigma=1,2,\cdots,N$. 从而, 存在于所得到的对称微分方程组 (4.109a) 中的分量 x,u 以及 $\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u$ 中其他的分量是自变量, 即它们可以取任意值. 因为所得到的表达式 (4.109a) 对于这些自变量的任意值都成立, 所以可得关于 ξ, η 的线性齐次偏微分方程组, 其构成关于给定偏微分方程组 (4.97) 拥有的无穷小生成元的确定方程组. 特别地, 如果每个 $f^\mu(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)$, $\mu=1,2,\cdots,N$ 是分量 $\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u$ 的多项式, 则对称确定方程组 (4.109a,b) 产生关于独立分量 $\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u$ 的多项式方程. 从而, 这些多项式方程的系数一定分别为零. 这导致关于 ξ, η 的线性确定方程组. 典型地, 确定方程的个数远大于 $n+m$, 使得确定方程组是非常超定的.

线性非齐次偏微分方程组

$$\mathrm{L}u = g(x) \tag{4.110}$$

拥有平凡的无穷参数 Lie 点变换群

$$x^* = x, \tag{4.111a}$$

$$u^* = u + \varepsilon\omega(x), \tag{4.111b}$$

其中 $\omega(x)$ 是辅助线性齐次偏微分方程组

$$Lu = 0$$

的任意解. 在这个平凡的无穷参数 Lie 点变换群中, 线性偏微分方程组拥有的 Lie 点变换群通常至多含有限个参数.

不像标量 PDE 的情况, 对于偏微分方程组拥有的点对称的形式, 了解还非常少. 对于偏微分方程组 (4.110) 拥有的点对称 (如所拥有的平凡无穷参数 Lie 点变换群 (4.111a,b)) 的无穷小生成元中, 猜测 ξ 与 u 无关, 且 η 关于 u 是线性的, 即

$$\xi_i = \xi_i(x), \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{4.112a}$$

$$\eta^\nu = k^\nu_\sigma(x)u^\sigma, \tag{4.112b}$$

其中 $k^\nu_\sigma(x), \sigma, \nu = 1, 2, \cdots, m$ 是某函数. 假设对于线性偏微分方程组拥有的 Lie 点变换群, 条件 (4.112a,b) 成立 (容易验证条件 (4.112a,b) 对于本书中的所有例子都成立).

对于一个 $n=2$, $m=2$ 的线性系统

$$x_1 = x, \quad x_2 = t, \quad \xi_1 = \xi(x,t), \quad \xi_2 = \tau(x,t), \quad u^1 = u, \quad u^2 = v,$$
$$\eta^1 = \eta^u = f(x,t)u + g(x,t)v, \quad \eta^2 = \eta^v = k(x,t)v + \ell(x,t)u,$$

这里点对称的无穷小生成元具有如下形式

$$X = \xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + [f(x,t)u + g(x,t)v]\frac{\partial}{\partial u} + [k(x,t)v + \ell(x,t)u]\frac{\partial}{\partial v}, \tag{4.113}$$

它的一阶延拓无穷小为

$$\eta^{(1)u}_x = \frac{\partial f}{\partial x}u + \frac{\partial g}{\partial x}v + \left[f - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]u_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}u_t + gv_x, \tag{4.114}$$

$$\eta^{(1)v}_x = \frac{\partial \ell}{\partial x}u + \frac{\partial k}{\partial x}v + \ell u_x + \left[k - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right]v_x - \frac{\partial \tau}{\partial x}v_t, \tag{4.115}$$

$$\eta^{(1)u}_t = \frac{\partial f}{\partial t}u + \frac{\partial g}{\partial t}v - \frac{\partial \xi}{\partial t}u_x + \left[f - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right]u_t + gv_t, \tag{4.116}$$

$$\eta^{(1)v}_t = \frac{\partial \ell}{\partial t}u + \frac{\partial k}{\partial t}v + \ell u_t - \frac{\partial \xi}{\partial t}v_x + \left[k - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right]v_t. \tag{4.117}$$

4.3.3 例子

1. 波方程组

考虑一阶线性波方程组

$$v_t = u_x, \tag{4.118a}$$

$$u_t = x^4 v_x. \tag{4.118b}$$

注意, 如果这个对 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足 (4.118a,b), 则 $u(x,t)$ 满足波方程

$$u_{tt} = x^4 u_{xx},$$

且 $v(x,t)$ 满足波方程

$$v_{tt} = (x^4 v_x)_x.$$

偏微分方程组 (4.118a,b) 的对称确定方程组 (4.102a,b) 为

$$\eta_t^{(1)v} = \eta_x^{(1)u}, \tag{4.119a}$$

$$\eta_t^{(1)u} = 4x^3 v_x \xi + x^4 \eta_x^{(1)v}, \tag{4.119b}$$

且 $v_t = u_x$, $u_t = x^4 v_x$. 将 (4.114)~(4.117) 代入 (4.119a,b), 然后利用给定的偏微分方程组 (4.118a,b) 消去 v_t 和 u_t, 可得如下的对称确定方程组

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x}\right] u + \left[\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x}\right] v + \left[x^4\left(\ell + \frac{\partial \tau}{\partial x}\right) - g - \frac{\partial \xi}{\partial t}\right] v_x \\ &+ \left[k - f + \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right] u_x = 0,\end{aligned} \tag{4.120a}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial f}{\partial t} - x^4 \frac{\partial \ell}{\partial x}\right] u + \left[\frac{\partial g}{\partial t} - x^4 \frac{\partial k}{\partial x}\right] v + \left[g - \frac{\partial \xi}{\partial t} + x^4\left(\frac{\partial \tau}{\partial x} - \ell\right)\right] u_x \\ &+ \left[x^4\left(f - k + \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t}\right) - 4x^3 \xi\right] v_x = 0.\end{aligned} \tag{4.120b}$$

(4.120a,b) 的每一个对于 x, t, u, v, u_x, v_x 的任意值一定成立. 故得关于 ξ, τ, f, g, k, ℓ 的含 8 个对称确定方程的系统, 简化为

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \tag{4.121a}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{4.121b}$$

$$x^4 \ell - g = 0, \tag{4.121c}$$

$$x^4\frac{\partial\tau}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial t}=0, \tag{4.121d}$$

$$x^4\frac{\partial k}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial t}=0, \tag{4.121e}$$

$$x^4\frac{\partial \ell}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{4.121f}$$

$$x\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]+2\xi=0, \tag{4.121g}$$

$$k-f+\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial t}=0. \tag{4.121h}$$

留作习题 4.3.3, 证明对称确定方程 (4.121a~h) 的解为

$$\xi(x,t)=\alpha x+2\beta xt, \tag{4.122a}$$

$$\tau(x,t)=-\alpha t-\beta(x^{-2}+t^2)+\gamma, \tag{4.122b}$$

$$f(x,t)=3\beta t+\delta, \tag{4.122c}$$

$$g(x,t)=-\beta x, \tag{4.122d}$$

$$k(x,t)=-2\alpha-\beta t+\delta, \tag{4.122e}$$

$$\ell(x,t)=-\beta x^{-3}, \tag{4.122f}$$

其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是四个任意常数. 因此, 波方程组 (4.118a,b) 拥有的点对称生成元为

$$X_1=\frac{\partial}{\partial t},\quad X_2=x\frac{\partial}{\partial x}-t\frac{\partial}{\partial t}-2v\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_3=2xt\frac{\partial}{\partial x}-(x^{-2}+t^2)\frac{\partial}{\partial t}+(3tu-xv)\frac{\partial}{\partial u}-(tv+x^{-3}u)\frac{\partial}{\partial v},\quad X_4=u\frac{\partial}{\partial u}+v\frac{\partial}{\partial v}.$$

这些无穷小生成元确定了作用在空间 (x,t,u,v) 上的非平凡的 4 参数 Lie 点变换群. 相应的 Lie 代数的非零换位子为

$$[X_1,X_2]=-X_1,\quad [X_1,X_3]=2X_2+3X_4,\quad [X_2,X_3]=-X_3.$$

可以证明, 具有基生成元 $Y_1=X_1, Y_2=X_2+\dfrac{3}{2}X_4,\quad Y_3=X_3$ 的 Lie 代数同构于 SO(2,1) 的 Lie 代数.

考虑无穷小生成元 X_3 (参数 β). 利用 4.3.1 节概括的两种方法可以求不变解 $(u,v)=(\Theta_1(x,t),\Theta_2(x,t))$

(1) 不变形式法. 这里, 特征方程 (4.104) 变为

$$\frac{\mathrm{d}x}{2xt}=-\frac{\mathrm{d}t}{x^{-2}+t^2}=\frac{\mathrm{d}u}{3tu-xv}=-\frac{\mathrm{d}v}{tv+x^{-3}u}. \tag{4.123}$$

(4.123) 的第一个 ODE 的积分, 即 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-2xt/(x^{-2}+t^2)$, 产生相似变量 (不变量)

$$y_1=\zeta=\text{const}=x^{-1}-xt^2. \tag{4.124}$$

为了确定 (4.123) 的其他不变量, 考虑相应的一阶特征常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varepsilon}=2xt, \tag{4.125a}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varepsilon}=-(x^{-2}+t^2), \tag{4.125b}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}=3tu-xv, \tag{4.125c}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon}=-(tv+x^{-3}u). \tag{4.125d}$$

将积分常数 (4.124) 代入常微分方程组 (4.125a,b), 由 (4.125b) 可得

$$\zeta^{-1}xt+\varepsilon=\text{const}=E. \tag{4.126}$$

常数 E 与 ε 的平移变换作用下 (4.125a~d) 的不变性有关. 不失一般性, 令 $E=0$. 从 (4.125a~d) 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\varepsilon^2}+4t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon}+2(t^2-x^{-2})v=0.$$

则利用 (4.124), 这个 ODE 可以简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}(xv)=0.$$

因此有

$$xv=v^1\varepsilon+v^2, \tag{4.127a}$$

其中 v^1,v^2 是积分常数. 故由方程 (4.125d) 可得

$$u=x^2[t(v^1\varepsilon+v^2)-v^1]. \tag{4.127b}$$

利用 $\varepsilon=-\zeta^{-1}xt$, 从 (4.127) 可以消去 ε , 进而得

$$u=x^2[-xt^2\zeta^{-1}v^1+tv^2-v^1],$$
$$v=x^{-1}[-xt\zeta^{-1}v^1+v^2].$$

常数 ζ,v^1,v^2 是 (4.123) 的无关不变量; ζ 是源于 X_3 的不变解的相似变量. 用 ζ 的函数来代替 v^1,v^2, 即 ζ, i.e., $v^1=F(\zeta),v^2=G(\zeta)$. 可求这些不变解 (不变形 (4.105) 中 $\Phi^1=F,\Phi^2=G$). 则

$$u=x^2[-xt^2\zeta^{-1}F(\zeta)+tG(\zeta)-F(\zeta)], \tag{4.128a}$$

$$v = x^{-1}[-xt\zeta^{-1}F(\zeta) + G(\zeta)]. \tag{4.128b}$$

现在将 (4.128a,b) 代入波方程 (4.118a,b) 可确定 $F(\zeta)$ 和 $G(\zeta)$. 由方程 (4.118a,b) 分别可得如下系统

$$xt[2G(\zeta) + \zeta G'(\zeta)] + [F'(\zeta) - \zeta^{-1}F(\zeta)] = 0,$$
$$[2G(\zeta) + \zeta G'(\zeta)] + \frac{x^2 t}{1 - x^2t^2}[\zeta F'(\zeta) - F(\zeta)] = 0.$$

故有

$$2G(\zeta) + \zeta G'(\zeta) = 0,$$
$$\zeta F'(\zeta) - F(\zeta) = 0,$$

从而知

$$G(\zeta) = a\zeta^{-2}, \quad F(\zeta) = b\zeta,$$

其中 a, b 是任意常数. 因此可得波方程组 (4.118a,b) 的两个线性无关的解

$$(u, v) = (x, t) \tag{4.129a}$$

和

$$(u, v) = \left(\frac{x^4 t}{[1 - x^2t^2]^2}, \frac{x}{[1 - x^2t^2]^2}\right). \tag{4.129b}$$

(2) 直接代入法. 这里, 不变曲面条件 (4.106) 变为

$$u_x = \frac{1}{2}[[x^{-3}t^{-1} + x^{-1}t]u_t + 3x^{-1}u - t^{-1}v], \tag{4.130a}$$

$$v_x = \frac{1}{2}[[x^{-3}t^{-1} + x^{-1}t]v_t - x^{-1}v - x^{-4}t^{-1}u]. \tag{4.130b}$$

利用 (4.130a,b), 从 (4.118a,b) 中消去 u 和 v 关于 x 的导数, 可知这些方程变为

$$v_t = \frac{1}{2}[[x^{-3}t^{-1} + x^{-1}t]u_t + 3x^{-1}u - t^{-1}v], \tag{4.131a}$$

$$u_t = \frac{1}{2}[[xt^{-1} + x^3t]v_t - x^3v - t^{-1}u], \tag{4.131b}$$

可看作关于自变量 t 和参数 x 的一阶常微分方程组.

表示 (4.131a,b) 为 v_t, u_t 可解形式, 令 $\sigma = xt$, 有

$$v_\sigma = \frac{\sigma(3 + \sigma^2)v + (1 - 5\sigma^2)x^{-2}u}{(1 - \sigma^2)^2}, \tag{4.132a}$$

$$u_\sigma = \frac{-\sigma(1 + 3\sigma^2)u + (3\sigma^2 - 1)x^2v}{(1 - \sigma^2)^2}. \tag{4.132b}$$

下面取 (4.132a) 的 $\partial/\partial\sigma$, 且通过 (4.132b) 消去 u_σ. 最后通过表示 (4.132a) 为如下形式

$$u = x^2\left(\frac{\sigma(3+\sigma^2)v + (\sigma^2-1)v_\sigma}{5\sigma^2-1}\right) \tag{4.133}$$

来消去 u. 由此可得二阶 ODE

$$(1-5\sigma^2)(\sigma^2-1)\frac{\partial^2 v}{\partial\sigma^2} - 4\sigma(5\sigma^2+1)\frac{\partial v}{\partial\sigma} + 4(5\sigma^2+1)v = 0. \tag{4.134}$$

(4.134) 的线性无关的解为

$$v = \sigma, \quad v = (1-\sigma^2)^{-2}.$$

因而

$$v = A(x)\sigma + B(x)(1-\sigma^2)^{-2} \tag{4.135a}$$

是 ODE(4.134) 的通解, 其中 $A(x), B(x)$ 是任意函数. 根据 (4.133) 可知

$$u = x^2 A(x) + x^2 B(x)\sigma(1-\sigma^2)^{-2}. \tag{4.135b}$$

将 (4.135a,b) 代入给定的 PDE (4.118a), 有

$$[A(x) + xA'(x)] = \frac{\sigma}{(1-\sigma^2)^2}[B(x) - xB'(x)]. \tag{4.136}$$

因为 (4.136) 对于 x 与 σ 的所有值一定成立, 则有

$$A(x) = ax^{-1}, \quad B(x) = bx,$$

其中 a 和 b 任意常数. 于是可得解 (4.129a,b).

注意, 直接代入法避免了特征方程 (4.104) 的积分, 从而它更使用于利用符号操作程序实现自动计算.

2. 非线性热传导方程

再次考虑非线性热传导方程

$$u_t = (K(u)u_x)_x. \tag{4.137}$$

我们构成辅助的偏微分方程组

$$v_t = K(u)u_x, \tag{4.138a}$$

$$v_x = u. \tag{4.138b}$$

注意, 如果对 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足偏微分方程组 (4.138a,b), 则 $u(x,t)$ 满足非线性热传导方程 (4.137), $v(x,t)$ 满足非线性 Diffusion 方程

$$v_t = K(v_x)v_{xx}.$$

由偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有的 Lie 点变换群可以得到标量 PDE(4.137) 的对称, 其既不是点变换也不是局部变换. 对于如何发现和利用给定偏微分方程组的那样非局部对称的全部讨论, 参看文献 (Bluman, Kumei, Reid, 1988; Bluman, Kumei, 1989b, 第 7 章; Bluman, Wu, 1995; Anco, Bluman, 1996, 1997b).

现在, 根据偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有的点对称, 对它的不变性性质进行完全分类. 我们将更多详细的讨论留给读者. 假设偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有形式的无穷小生成元

$$X=\xi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\eta^u(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\eta^v(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.139}$$

这里, 对称确定方程组 (4.102) 变为

$$\eta_t^{(1)v}=K'(u)u_x\eta^u+K(u)\eta_x^{(1)u}, \tag{4.140a}$$

$$\eta_x^{(1)v}=\eta^u, \tag{4.140b}$$

且

$$v_t=K(u)u_x,\quad v_x=u, \tag{4.140c}$$

其中 $\eta_t^{(1)v},\eta_x^{(1)u},\eta_x^{(1)v}$ 由 (2.135) 确定. 将给定的偏微分方程组 (4.138a,b) 代入 (4.140a,b), 消去 v_x , v_t, 可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial\eta^v}{\partial t}-u\frac{\partial\tau}{\partial t}-K(u)\left(\frac{\partial\eta^u}{\partial x}+u\frac{\partial\eta^u}{\partial v}\right)\right]\\&+\left[K(u)\left(\frac{\partial\eta^v}{\partial v}-\frac{\partial\tau}{\partial t}-\frac{\partial\eta^u}{\partial u}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-K'(u)\eta^u\right]u_x\\&+\left[\frac{\partial\eta^v}{\partial u}-u\frac{\partial\xi}{\partial t}+K(u)\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}+u\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)\right]u_t+K(u)\left[\frac{\partial\xi}{\partial u}-K(u)\frac{\partial\tau}{\partial v}\right](u_x)^2=0,\end{aligned} \tag{4.141a}$$

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial\eta^v}{\partial x}+u\frac{\partial\eta^v}{\partial v}-u\frac{\partial\xi}{\partial x}-u^2\frac{\partial\xi}{\partial v}-\eta^u\right]+\left[\frac{\partial\eta^v}{\partial u}-u\frac{\partial\xi}{\partial u}-K(u)\left(\frac{\partial\tau}{\partial x}+u\frac{\partial\tau}{\partial v}\right)\right]u_x\\&-K(u)\frac{\partial\tau}{\partial u}(u_x)^2=0.\end{aligned} \tag{4.141b}$$

每个对称确定方程组 (4.141a,b) 对于 x,t,u,v,u_x,u_t 的任意值一定成立. 故可得关于 ξ,τ,η^u,η^v 的含 7 个对称确定方程的系统, 简化为

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}=0, \tag{4.142a}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}+u\frac{\partial\tau}{\partial v}=0, \tag{4.142b}$$

$$\frac{\partial \eta^v}{\partial u} - u\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \tag{4.142c}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - K(u)\frac{\partial \tau}{\partial \nu} = 0, \tag{4.142d}$$

$$\frac{\partial \eta^v}{\partial t} - u\frac{\partial \xi}{\partial t} - K(u)\left(\frac{\partial \eta^u}{\partial x} + u\frac{\partial \eta^u}{\partial v}\right) = 0, \tag{4.142e}$$

$$\frac{\partial \eta^v}{\partial v} - \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \eta^u}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{K'(u)}{K(u)}\eta^u = 0, \tag{4.142f}$$

$$\frac{\partial \eta^v}{\partial x} + u\frac{\partial \eta^v}{\partial v} - u\frac{\partial \xi}{\partial x} - u^2\frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta^u = 0. \tag{4.142g}$$

对称确定方程组 (4.142a~g) 的解留作习题 4.3.5. 这些结果总结如下 (Bluman, Kumei, Reid, 1988).

情况 I. $K(u)$ 任意.

这里, 给定偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有 4 参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.143}$$

情况 II. $K(u) = \lambda(u+\kappa)^\nu$.

这里, 给定偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有 5 参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为 (4.143) 和

$$X_5 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2\nu^{-1}(u+\kappa)\frac{\partial}{\partial u} + [(1+2\nu^{-1})v + 2\nu^{-1}\kappa x]\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.144}$$

情况 III. $K(u) = \lambda(u+\kappa)^{-2}$.

这里, 给定偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有无穷参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为 (4.143), (4.144)(且 $\nu = -2$) 以及

$$\begin{aligned}
X_6 =& - x(v+\kappa x)\frac{\partial}{\partial x} + (u+\kappa)[v + x(u+2\kappa)]\frac{\partial}{\partial u} + [2\lambda t + \kappa x(v+\kappa x)]\frac{\partial}{\partial v}, \\
X_7 =& - x[(v+\kappa x)^2 + 2\lambda t]\frac{\partial}{\partial x} + 4\lambda t^2\frac{\partial}{\partial t} + (u+\kappa)[6\lambda t + (v+\kappa x)^2 \\
&+ 2x(u+\kappa)(v+\kappa x)]\frac{\partial}{\partial u} + [\kappa x(v+\kappa x)^2 + 2\lambda t(2v+3\kappa x)\frac{\partial}{\partial v}, \\
X_\infty =& \phi(z,t)\frac{\partial}{\partial x} - (u+\kappa)^2\frac{\partial \phi(z,t)}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u} - \kappa\phi(z,t)\frac{\partial}{\partial v},
\end{aligned} \tag{4.145}$$

其中 $z = v + \kappa x$, 以及 $w = \phi(z,t)$ 是线性热方程

$$w_t = \lambda w_{zz}$$

的任意解. 无穷小生成元 X_∞ 将非线性热传导方程

$$u_t = \lambda((u+\kappa)^{-2}u_x)_x$$

映成线性 PDE(Kumei, Bluman, 1982; Bluman, Kumei, 1990a; Bluman, Kumei, 1989b, 第 6 章).

情况 IV. $K(u) = \dfrac{1}{u^2+pu+q}\exp\left[r\displaystyle\int\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2+pu+q}\right]$, 其中 p, q, r 是任意常数且

$$p^2 - 4q - r^2 \neq 0.$$

这里, 给定偏微分方程组 (4.138a,b) 拥有 5 参数 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.134) 和

$$X_5 = v\frac{\partial}{\partial x} + (r-p)t\frac{\partial}{\partial t} - (u^2+pu+q)\frac{\partial}{\partial u} - (qx+pv)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.146}$$

3. 非齐次媒介中的波方程

再考虑非齐次媒介中具有变波速 $c(x)$ 的波方程

$$u_{tt} = c^2(x)u_{xx}. \tag{4.147}$$

我们构成辅助的一阶偏微分方程组

$$v_t = u_x, \tag{4.148a}$$

$$u_t = c^2(x)v_x. \tag{4.148b}$$

如果对 $(u(x,t), v(x,t))$ 满足偏微分方程组 (4.148a,b), 则 $u(x,t)$ 满足非线性热传导方程 (4.17), $v(x,t)$ 满足双曲线方程

$$v_{tt} = (c^2(x)v_x)_x$$

关于 Lie 点变换群作用下偏微分方程组 (4.148a,b) 的不变性, 现在对偏微分方程组 (4.148a,b) 进行完全群分类. 假设 (4.148a,b) 拥有 (4.113) 形式的无穷小生成元. 证明关于 $\xi(x,t)$, $\tau(x,t), f(x,t), g(x,t), k(x,t)$, $\ell(x,t)$ 的对称确定方程组为 (留作习题 4.3.6)

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial x} = 0, \tag{4.149a}$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{4.149b}$$

$$c^2(x)\ell - g = 0, \tag{4.149c}$$

$$c^2(x)\frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0, \tag{4.149d}$$

$$c^2(x)\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \tag{4.149e}$$

$$c^2(x)\frac{\partial \ell}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{4.149f}$$

$$c(x)\left[\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right] + c'(x)\xi = 0, \tag{4.149g}$$

$$k - f + \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t} = 0. \tag{4.149h}$$

源于确定方程 (4.149a~c,f) 的可积条件使得 $g(x,t)$ 满足

$$\frac{\partial g}{\partial x}H(x) + gH'(x) = 0, \tag{4.150}$$

其中

$$H(x) = \frac{c'(x)}{c(x)}. \tag{4.151}$$

从而有

$$g(x,t) = -\frac{a(t)}{2H(x)}, \tag{4.152}$$

其中 $a(t)$ 是任意函数. 根据波速 $c(x)$ 是否满足 ODE

$$cc'\left(\frac{c}{c'}\right)'' = \text{const} = \mu, \tag{4.153}$$

存在两种情况, 其中 μ 是某常数. 如果 $c(x)$ 满足 ODE (4.153), 则 $a(t)$ 满足 ODE

$$a''(t) = \mu a(t).$$

如果对任意常数 μ, $c(x)$ 不满足 ODE (4.153), 则 $a(t) \equiv 0$, 且相应的偏微分方程组 (4.148a,b) 仅仅拥有两个明显的无穷小生成元

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.154}$$

如果波速 $c(x)$ 满足 ODE(4.153), 则可以证明相应的偏微分方程组 (4.148a,b) 拥有 4 参数 Lie 点变换群. 根据 ODE (4.153) 的解, 群分类总结如下, 以 x 的尺度和平移变换为例 (Bluman, Kumei, 1987, 1988):

(I) $\mu = 0$.

这种情况, 有

$$c(x) = \mathrm{e}^x \text{ 或 } x^C, \tag{4.155}$$

其中 C 是任意常数.

(II) $\mu \neq 0$.

这里, ODE(4.153) 不可显式地求解, 但可约化为下面一阶 ODEs 中的一个:

$$c' = \upsilon^{-1}\sin(\upsilon\log c), \tag{4.156a}$$

$$c' = \upsilon^{-1}\sinh(\upsilon\log c), \tag{4.156b}$$

$$c' = \log c, \tag{4.156c}$$

$$c' = \upsilon^{-1}\cosh(\upsilon\log c), \tag{4.156d}$$

$\upsilon \neq 0$ 是一个任意常数. 如果 $c(x) = \phi(x, \upsilon)$ 是 ODE (4.156a~d) 中的任一方程的解, 则 ODE (4.153) 的相应通解为

$$c(x) = K\phi(Lx + M, \upsilon),$$

其中 $K^2L^2 = |\mu|$, L, M, υ 是任意常数. 关于无穷小生成元存在如下子情况:

情况 Ia. $c(x) = x^C$, $C \neq 0, 1$.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} + (1-C)t\frac{\partial}{\partial t} - Cv\frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= 2xt\frac{\partial}{\partial x} + \left[(1-C)t^2 + \frac{x^{2-2C}}{1-C}\right]\frac{\partial}{\partial t} + [(2C-1)tu - xv]\frac{\partial}{\partial u} - [tv + x^{1-2C}u]\frac{\partial}{\partial v}, \\ X_4 &= u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4.157}$$

情况 Ib. $c(x) = x$.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= 2xt\frac{\partial}{\partial x} + 2\log x\frac{\partial}{\partial t} + [tu - xv]\frac{\partial}{\partial u} - [tv + x^{-1}u]\frac{\partial}{\partial v}, \\ X_4 &= u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4.158}$$

情况 Ic. $c(x) = \mathrm{e}^x$.

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v}, \\ X_3 &= -4t\frac{\partial}{\partial x} + 2[t^2 + \mathrm{e}^{-2x}]\frac{\partial}{\partial t} + 2[-2tu + v]\frac{\partial}{\partial u} + 2\mathrm{e}^{-2x}u\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \tag{4.159}$$

情况 II. $\mu \neq 0$.

如果波速 $c(x)$ 满足 ODEs(4.156a,b) 中的方程, 则给定偏微分方程组 (4.148a,b) 拥有如下无穷小生成元

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_2 = \mathrm{e}^t \left\{ 2c(c')^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + 2[(c(c')^{-1})' - 1]\frac{\partial}{\partial t} + [(2 - (c(c')^{-1})')u - c(c')^{-1}v]\frac{\partial}{\partial u} \right.$$
$$\left. - [(c(c')^{-1})'v + (cc')u\frac{\partial}{\partial v} \right\},$$
$$X_3 = \mathrm{e}^{-t} \left\{ 2c(c')^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + 2[1 - (c(c')^{-1})']\frac{\partial}{\partial t} + [(2 - (c(c')^{-1})')u + c(c')^{-1}v]\frac{\partial}{\partial u} \right.$$
$$\left. - [(c(c')^{-1})'v - (cc')u\frac{\partial}{\partial v} \right\},$$
$$X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.160}$$

得到的不变解参看文献 (Bluman, Kumei, 1987, 1988). 不变解的特殊情况将在 4.4.3 节中讨论.

通过函数 $D(u), K(u)$, Lisle(1992) 对扩散对流偏微分方程组

$$v_x = u,$$
$$v_t = D(u)u_x - K(u)$$

进行了部分群分类. 对于函数, 该系统拥有额外的点对称 (包括标量扩散对流方程的非局部对称).

Akhatov, Gazizov, Ibragimov (1988) 及 Ibragimov (1995) 提出了一维绝热气体方程组

$$\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0,$$
$$\rho(v_t + vv_x) + p_x = 0,$$
$$\rho(p_t + vp_x) + B(p,\rho)v_x = 0$$

的群分类, 其中, $\rho(x,t)$ 是气体的密度, $p(x,t)$ 是压强, $v(x,t)$ 是速度, $B(p,\rho)$ 是结构律.

更多进一步的例子见文献 (Ibragimov, 1995).

习　题　4.3

1. 证明定理 4.3.1.
2. 证明: PDEs(4.118a,b) 所拥有的点对称的无穷小生成元具有形式 (4.113).
3. 证明: (4.122a~f) 是对称确定方程 (4.121a~h) 的通解.
4. 线性波方程组 (4.118a,b) 拥有无穷小生成元

$$X = X_3 + sX_4 = 2xt\frac{\partial}{\partial x} - [x^{-2} + t^2]\frac{\partial}{\partial t} + [(3t+s)u - xv]\frac{\partial}{\partial u}$$
$$+[(s-t)v - x^{-3}u]\frac{\partial}{\partial v}.$$

(a) 对于源于 X 用下不变解, 证明不变形式为

$$
\begin{aligned}
u &= x^2 \mathrm{e}^{-sxt\zeta^{-1}}[-xt^2\zeta^{-1}F(\zeta;s) + tG(\zeta;s) - F(\zeta;s)],\\
v &= x^{-1} \mathrm{e}^{-sxt\zeta^{-1}}[-xt^2\zeta^{-1}F(\zeta;s) + G(\zeta;s)],
\end{aligned}
$$

其中 $F(\zeta;s)$ 和 $G(\zeta;s)$ 是 ζ 与 s 的任意函数. 相似变量为 ζ.

(b) 确定 $F(\zeta;s), G(\zeta;s)$ 满足的耦合的 ODEs. 根据特殊函数简化并表示该解.

(c) 利用直接代入法, 来推导这些不变解.

5. 完成 PDEs(4.138a,b) 的群分类, 并且推导 (4.143)~(4.146).

6. 推导对称确定方程组 (4.149a~h).

7. 考虑二维非定态边界层方程

$$
u_t + uu_x + vu_y + p_x = u_{yy}, \quad p_y = 0, \quad u_x + v_y = 0, \tag{4.161}
$$

$u(x,y,t), v(x,y,t)$ 是速度向量分量; $p(x,t)$ 是压力; 不失一般性, 黏度和密度常数设为 1. 证明: (4.161) 的点对称为

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - v\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p},\\
&X_{\infty_1} = \alpha(t)\frac{\partial}{\partial x} + \alpha'(t)\frac{\partial}{\partial u} - x\alpha''(t)\frac{\partial}{\partial p},\\
&X_{\infty_2} = \beta(t)\frac{\partial}{\partial y} + \beta'(t)\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_{\infty_3} = \gamma(t)\frac{\partial}{\partial p},
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha(t), \beta(t)$ 和 $\gamma(t)$ 是 t 的任意充分光滑函数 (Ovsiannikov, 1982).

8. 证明: 二维定态边界层方程 (PDEs(4.161) 中 $u_t = 0$) 拥有

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial v},\\
&X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial p}, \quad X_\infty = \phi(x)\frac{\partial}{\partial y} + u\phi'(x)\frac{\partial}{\partial v},
\end{aligned}
$$

其中 $\phi(x)$ 是任意可微函数 (Ovsiannikov, 1982).

9. 证明: 三维不可压缩 Navier-Stokes 方程(x_1, x_2, x_3 是空间变量; t 是时间; u^1, u^2, u^3 是速度向量分量; p 是压力; $\nabla^2 = \sum_{i=1}^{3} \partial^2/\partial x_i^2$; 不失一般性, 黏度设为 1).

$$
\sum_{i=1}^{3} u_{x_i}^i = 0, \quad u_t^j + \sum_{i=1}^{3} u^i u_{x_i}^j + p_{x_j} = \nabla^2 u^j, \quad j = 1, 2, 3,
$$

有

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{3}\left[x_i\frac{\partial}{\partial x_i} - u^i\frac{\partial}{\partial u^i}\right] + 2\left[t\frac{\partial}{\partial t} - p\frac{\partial}{\partial p}\right],$$

$$X_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + u^2\frac{\partial}{\partial u^1} - u^1\frac{\partial}{\partial u^2},$$

$$X_4 = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3} + u^3\frac{\partial}{\partial u^1} - u^1\frac{\partial}{\partial u^3},$$

$$X_5 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3} + u^3\frac{\partial}{\partial u^2} - u^2\frac{\partial}{\partial u^3},$$

$$X_{\infty_j} = \alpha_j(t)\frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha_j'(t)\frac{\partial}{\partial u^j} - x_j\alpha_j''(t)\frac{\partial}{\partial p}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$X_{\infty_4} = \beta(t)\frac{\partial}{\partial p},$$

其中 $\beta(t)$, $\alpha_j(t), j = 1, 2, 3$ 是任意函数 ((Boisvert, Ames, Srivastava, 1983), 此文给出了各种不变解).

10. 对于表面势函数 $V(x)$, 如果复值函数 $\psi(x,t)$ 满足三次非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\psi_t = -\psi_{xx} + V(x)\psi + |\psi|^2\psi, \tag{4.162}$$

则正则变换

$$\psi(x,t) = \sqrt{v}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u/2}$$

将 (4.161) 变换为非线性偏微分方程组

$$u_t + \frac{1}{2}(u_x)^2 + 2v + 2V(x) = 2v^{-1/2}(v^{1/2})_{xx}, \quad v_t + (vu_x)_x = 0. \tag{4.163}$$

其代表 Madelung 流体, 其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是实值函数, 证明: 如果 $V(x) = -x$, 则 PDEs(4.163) 拥有无穷小生成元

$$X_1 = (x + 3t^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} + (6xt + 2t^2)\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + (x + t^2)\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = \frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial u}$$

(见文献 (Baumann, Nonnenmacher, 1987), 文中给出了上述无穷小生成元及相应的不变解).

11. 证明: 耦合的二维非线性 Schrödinger 方程组

$$\mathrm{i}u_t - u_{xx} + u_{yy} + |u|^2u - 2uv = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} - (|u|^2)_{xx} = 0$$

拥有无穷小生成元

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} - 2v\frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_5 = -t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\mathrm{i}xu\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_6 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\mathrm{i}yu\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_7 = xt\frac{\partial}{\partial x} + yt\frac{\partial}{\partial y} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left[t + \frac{1}{4}\mathrm{i}(x^2 - y^2)\right]u\frac{\partial}{\partial u} - 2tv\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_8 = \mathrm{i}u\frac{\partial}{\partial u}.$$

其中 $u(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 是复值函数 (Tajiri, Hagiwara, 1983).

12. 平底上的二维流的潜水波方程为

$$u_t + uu_x + vu_y + gH_x = 0, \quad v_t + vu_x + vu_y + gH_y = 0,$$
$$H_t + uH_x + vH_y + H(u_x + v_y) = 0,$$

其中 $u(x,y,t), v(x,y,t)$ 是速度向量的分量, $H(x,y,t)$ 是水深, $g = \text{const}$ 是重力加速度. 证明：该方程组拥有点对称 (Ibragimov, 1983).

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_5 = t\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v},$$

$$X_6 = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial u} - u\frac{\partial}{\partial v}, \quad X_7 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},$$

$$X_8 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v} + 2H\frac{\partial}{\partial H},$$

$$X_9 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + tx\frac{\partial}{\partial x} + ty\frac{\partial}{\partial y} + (x - tu)\frac{\partial}{\partial u} + (x - tv)\frac{\partial}{\partial v} - 2tH\frac{\partial}{\partial H}.$$

13. 考虑从 $(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^\ell u)$ 空间到 $(y, v, \partial v, \partial^2 v, \cdots, \partial^\ell v)$ 空间的映射 $x = X(y,v), u = U(y,v)$, 其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), u = (u^1, u^2, \cdots, u^m), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n), v = (v^1, v^2, \cdots, v^m)$; $\partial^j v$ 表示 v 的分量关于 y 的分量的第 j 个偏导数. 通过求解方程 $\Theta^\alpha(X(y,v)) = U^\alpha(y,v)$, $\alpha = 1, 2, \cdots, m$. 函数 $u = \Theta(x)$ 变换为函数 $v = \Phi(y)$. 令

$$\frac{DX_k}{Dy_j} = \frac{\partial X_k}{\partial y_j} + \frac{\partial X_k}{\partial v^\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial y_j}, \quad \frac{DU^\alpha}{Dy_j} = \frac{\partial U^\alpha}{\partial y_j} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial v^\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial y_j},$$

$$\frac{D^2U^\alpha}{Dy_jDy_k} = \frac{\partial^2 U^\alpha}{\partial y_j \partial y_k} + \frac{\partial^2 U^\alpha}{\partial y_j \partial v^\mu}\frac{\partial v^\mu}{\partial y_k} + \frac{\partial^2 U^\alpha}{\partial v^\mu \partial v^\lambda}\frac{\partial v^\mu}{\partial y_k}\frac{\partial v^\lambda}{\partial y_j} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial v^\mu}\frac{\partial^2 v^\mu}{\partial y_j \partial y_k}.$$

在上面映射作用下, Jacobi 矩阵满足

$$\frac{DX}{Dy} = \frac{D(X_1, X_2, \cdots, X_n)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \det\left\|\frac{DX_i}{Dy_j}\right\| = \begin{vmatrix} \dfrac{DX_1}{Dy_1} & \cdots & \dfrac{DX_1}{Dy_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{DX_n}{Dy_1} & \cdots & \dfrac{DX_n}{Dy_n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(a) 证明

$$\frac{DU^\alpha}{Dy_j}=\frac{DX_k}{Dy_j}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_k},$$

因而有

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}=\frac{\dfrac{D(X_1,X_2,\cdots,X_{i-1},U^\alpha,X_{i=1},\cdots,X_n)}{Dy}}{\dfrac{DX}{Dy}}.$$

(b) 证明

$$\frac{D^2U^\alpha}{Dy_jDy_k}=\frac{D^2X_p}{Dy_jDy_k}\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_p}+\frac{DX_p}{Dy_j}\frac{DX_q}{Dy_k}\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial y_p\partial y_q}.$$

(c) 证明

$$\det\left\|\frac{DX_p}{Dy_j}\frac{DX_q}{Dy_k}\right\|=\det\left\|\frac{DX_i}{Dy_j}\otimes\frac{DX_i}{Dy_j}\right\|=\left(\frac{DX}{DY}\right)^{2n}$$

(Greub, 1967, p. 26). 作为例子, 证明

$$\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1^2}=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{D^2U^\alpha}{Dy_1^2}-\dfrac{D^2X_k}{Dy_1^2}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x_k} & \dfrac{DX_1}{Dy_1}\dfrac{DX_2}{Dy_1} & \cdots & \dfrac{DX_n}{Dy_1}\dfrac{DX_n}{Dy_1}\\ \dfrac{D^2U^\alpha}{Dy_1Dy_2}-\dfrac{D^2X_k}{Dy_1Dy_2}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x_k} & \dfrac{DX_1}{Dy_1}\dfrac{DX_2}{Dy_2} & \cdots & \dfrac{DX_n}{Dy_1}\dfrac{DX_n}{Dy_2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{D^2U^\alpha}{Dy_n^2}-\dfrac{D^2X_k}{Dy_n^2}\dfrac{\partial u^\alpha}{\partial x_k} & \dfrac{DX_1}{Dy_n}\dfrac{DX_2}{Dy_n} & \cdots & \dfrac{DX_n}{Dy_n}\dfrac{DX_n}{Dy_n}\end{vmatrix}}{\left(\dfrac{DX}{DY}\right)^{2n}}.$$

4.4 应用于边值问题

在 4.1~4.3 节中, 我们说明了如何求给定 PDEs 的点对称以及如何应用它们求得不变解. 现在考虑用不变性求解 PDEs 的边值问题. 应用 Lie 对称研究 PDEs 的边值问题比 ODEs 具有更多的局限性.

ODE 所拥有的积分因子或点对称 (或更一般地, 高阶对称) 导致 ODE 阶的一次约化. 根据最初的变量 (积分因子约化) 或相应的微分不变量 (点对称约化), ODE 的任意构造的边值问题可以自动地约化为低阶 ODE 的边值问题.

对于 PDE 情形, 假如对称使得所有的边值条件保持不变. 源于拥有的点对称的不变解满足给定的边值问题. 这意味着边值问题的邻域 (或它的边界) 以及边界条件一定是不变量.

对于线性 PDEs 的边值问题, 这种情况并不受限制. 这里边值问题不需要是完全不变量 (不完全不变性), 因为在下面的情况下可以用不变解适当的叠加.

(i) 对于具有线性齐次边界条件的一个线性非齐次 PDE, 辅助的线性齐次 PDE 拥有的无穷小生成元 $X \neq u\dfrac{\partial}{\partial u}$ 是有用的, 如果齐次边界条件也拥有 X. 因此可知, 辅助线性齐次 PDE 和齐次边界条件都拥有 $X + \lambda u\dfrac{\partial}{\partial u}$(这里 λ 是特征值). 可用源于无穷小生成元 $X + \lambda u\dfrac{\partial}{\partial u}$ (λ 是任意常数)的不变形式函数的叠加 (即特征函数展开, 积分变换表示) 求解边值问题.

(ii) 对于具有 $p \geqslant 1$个线性齐次边界条件和线性非齐次边界条件的线性非齐次 PDE, 这个线性齐次 PDE 拥有的无穷小生成元 $X \neq u\dfrac{\partial}{\partial u}$ 是有用的, 如果 p 个齐次边界条件也拥有 X. 从而可知, 对于任意复常数 λ, 这个 PDE 和它的 p 个齐次边界条件拥有无穷小生成元 $X + \lambda u\dfrac{\partial}{\partial u}$. 这里, 通过首先构造源于 $X + \lambda u\dfrac{\partial}{\partial u}$ 的不变解, 且满足 PDE 和它的齐次边界条件来求解边值问题. 然后通过求这些不变解的叠加来求解非齐次边界条件. 注意, 在这种情况中 (不像情况 (i)), X 并不必使得边值问题的邻域保持不变.

4.4.1 节和 4.4.2 节的结果以更基本的形式首次出现在文献 (Bluman, 1967, 1974; Bluman, Cole, 1969, 1974)(本节剩余部分, 假设重复指标表示求和).

4.4.1 标量 PDE 的边值问题不变性的公式

考虑 $k(k \geqslant 2)$ 阶标量 PDE 的边值问题, 且可以写为可解形式

$$F(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell} - f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u) = 0 \tag{4.164a}$$

($f(x, u, \partial u, \partial^2 u, \cdots, \partial^k u)$ 并不显式地依赖 $u_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}$), 其定义在 x 空间 ($x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$) 上的邻域 Ω_x 内, 且边界条件为

$$B_\alpha(x, u, \partial u, \cdots, \partial^{k-1} u) = 0. \tag{4.164b}$$

规定在边界曲面

$$\omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s. \tag{4.164c}$$

假设边值问题 (4.164a~c) 具有唯一解. 考虑如下形式的无穷小生成元

$$X = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \eta(x, u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.165}$$

其定义了作用在 (x, u) 空间以及它的 x 空间的射影上的点对称.

定义 4.4.1.1 边值问题 (4.164a~c) 拥有 (4.165) 形式的点对称 X, 当且仅当

(i) $X^{(k)}F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0$, 当 $F(x,u,\partial u,\partial^2 u,\cdots,\partial^k u)=0$; (4.166a)

(ii) $X\omega_\alpha(x)=0$, 当 $\omega_\alpha(x)=0$, $\alpha=1,2,\cdots,s$; (4.166b)

(iii) $X^{(k-1)}B_\alpha(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u)=0$, 当 $B_\alpha(x,u,\partial u,\cdots,\partial^{k-1}u)=0, \omega_\alpha(x)=0$, $\alpha=1,2,\cdots,s$. (4.166c)

定理 4.4.1.1 假设边值问题 (4.164a~c) 拥有 Lie 点变换群且无穷小生成元为 (4.165). 令 $y=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{n-1}(x))$ 是 (4.165) 的 $n-1$ 个仅依赖于 x 的函数无关的群不变量. 令 $v(x,u)$ 是 (4.165) 的一个群不变量, 满足 $\partial v/\partial u\neq 0$. 则存在一些函数 $G(y,v,\partial v,\partial^2 v,\cdots,\partial^k v), C_\alpha(y,v,\partial v,\partial^2 v,\cdots,\partial^{k-1}v), \nu_\alpha(y), \alpha=1,2,\cdots,s$, 使得边值问题 (4.164a~c) 约化为

$$G(y,v,\partial v,\partial^2 v,\cdots,\partial^k v)=0. \tag{4.167a}$$

上式定义于 y 空间的某区域 Ω_y, 且满足边界条件

$$C_\alpha(y,v,\partial v,\partial^2 v,\cdots,\partial^{k-1}v)=0, \tag{4.167b}$$

该条件约束于边界曲面

$$\nu_\alpha(y)=0, \tag{4.167c}$$

进一步, 在边值问题 (4.167a,b) 中, $\partial^j v$ 表示 v 对 $y=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{n-1}(x)), j=1,2,\cdots,k$ 的所有 j 阶导数构成的集合, 且 (4.167a) 能够写成 v 对 y 的某特定的 ℓ 阶偏导数的可解形式.

证明留作习题 4.4.1.

注意曲面 $y_j(x)=0$, $j=1,2,\cdots,n-1$ 是点对称 (4.165) 的不变曲面. 不变条件 (4.166b) 意味每个边界曲面 $\omega_\alpha(x)=0$ 是由点对称 (4.165) 在 x 空间上的投影所给定的投影点对称

$$\xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{4.168}$$

的不变曲面 $\nu_\alpha(y)=0$. 由点对称 (4.165) 作用下边值条件的不变性可知, (4.164a~c) 的自变量的个数减少一个. 特别地, 边值问题 (4.164a~c) 的解是 PDE(4.167a) 的不变解.

$$\nu=\Phi(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}) \tag{4.169}$$

其源于点对称 (4.165) 作用下 (4.167a) 的不变性. 根据 PDE (4.1464a) 中的自变量和因变量, 它的相应的不变解一定满足

$$X(u-\varTheta(x))=0, \quad 当\ u=\varTheta(x), \tag{4.170}$$

即

$$\xi_i(x)\frac{\partial\varTheta(x)}{\partial x_i}=\eta(x,\varTheta(x)). \tag{4.171}$$

定理 4.4.1.2 如果由 (4.165) 给定的无穷小生成元 X 具有如下形式

$$X = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + f(x)u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.172}$$

则对于某特殊函数 $g(x)$, 群不变量 $v(x,u)$ 具有形式 $v(x,u) = u/g(x)$, 且与 X 作用下不变性有关的不变形式可以表示为分离形式

$$u = \Theta(x) = g(x)\Phi(y), \tag{4.173}$$

其中 $\Phi(y)$, $y = (y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n-1}(x))$ 的任意函数.

证明留作习题 4.4.2.

如果边值条件 (4.164a~c) 拥有 r 参数 Lie 点变换群且无穷小生成元具有形式

$$X_i = \xi_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \eta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \tag{4.174}$$

则边值问题 (4.164a~c) 的唯一解 $u = \Theta(x)$ 是不变解且满足

$$X_i(u - \Theta(x)) = 0, \quad 当\ u = \Theta(x), \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

下面定理的证明留作习题 4.4.3.

定理 4.4.1.3 (多参数 Lie 点变换群作用下边值问题的不变性) 假设边值条件 (4.164a~c) 拥有 r 参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元具有形式

$$X_i = \xi_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + \eta_i(x,u)\frac{\partial}{\partial u}, \quad i = 1, 2, \cdots, r. \tag{4.175}$$

令 R 是 $r \times n$ 矩阵

$$\Xi(x) = \begin{bmatrix} \xi_{11}(x) & \xi_{12}(x) & \cdots & \xi_{1n}(x) \\ \xi_{21}(x) & \xi_{22}(x) & \cdots & \xi_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_{r1}(x) & \xi_{r2}(x) & \cdots & \xi_{rn}(x) \end{bmatrix} \tag{4.176}$$

的秩. 令 $q = n - R$ 以及 $z_1(x), z_2(x), \cdots, z_q(x)$ 是 (4.175) 的函数无关的不变量的全集合, 且满足

$$\xi_{ij}(x)\frac{\partial z_\ell(x)}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r, \ \ \ell = 1, 2, \cdots, q. \tag{4.177}$$

令

$$v = \frac{u}{g(x)} \tag{4.178}$$

是 (4.175) 的不变量, 且满足

$$X_i v = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, r.$$

则边值条件 (4.164a~c) 约化为边值条件且有 $q = n - R$ 个自变量 $z = (z_1(x), z_2(x), \cdots, z_q(x))$ 和 (4.178) 确定的因变量 v. 边值条件 (4.164a~c) 的解是不变解, 且可表示为可分离的形式

$$u = g(x)\Phi(z), \tag{4.179}$$

其中函数 $\Phi(z)$ 是待定的.

下面的例子很典型:

1. 热方程的基本解

再考虑定义在邻域 $t > 0$, $a < x < b$ 上的热方程 (4.47). PDE (4.47) 拥有由如下形式的无穷小生成元

$$X = \xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(t)\frac{\partial}{\partial t} + f(x,t)u\frac{\partial}{\partial u}$$

给定的 6 参数 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda)$ Lie 点变换群, 且无穷小为

$$\xi(x,t) = \kappa + \beta x + \gamma x t + \delta t, \tag{4.180a}$$

$$\tau(t) = \alpha + 2\beta t + \gamma t^2, \tag{4.180b}$$

$$f(x,t) = -\gamma\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}\delta x + \lambda. \tag{4.180c}$$

该邻域的边界曲线是 $t=0$, $x = a$, $x = b$. $t=0$ 的不变性使得

$$\tau(0) = 0,$$

因此有 $\alpha = 0$. 如果 $a = -\infty$, $b = \infty$, 则并不存在边界曲线的不变性所导致的参数约化. 如果 $a \neq -\infty$, 则对于任意 $t>0$, $x = a$ 的不变性使得

$$\xi(a,t) = 0.$$

故有

$$\kappa = -\beta a, \quad \delta = -\gamma a.$$

类似地, 如果 $b \neq \infty$, 则 $x = b$ 的不变性使得

$$\kappa = -\beta b, \quad \delta = -\gamma b.$$

从而, 如果 $a \neq -\infty$, $b \neq \infty$, 则有 $\beta = \gamma = \delta = \kappa = 0$, 所以热方程和定义在邻域 $t > 0, a < x < b$ 上的边值问题的边界都不拥有非平凡的 Lie 点变换群. 然而, 因为 PDE (4.47) 是线性的, 所以并不一定要求邻域的边界曲线保持不变, 正如 4.4 节绪言中所提到的, 这将在 4.2 节中证明.

如果 $a = -\infty$, $b = \infty$, 则邻域 $t > 0, a < x < b$ 上的热方程 (4.47) 的边值问题的边界拥有 4 参数 Lie 点变换群, 因而边值问题至多拥有 5 参数 $(\beta, \gamma, \delta, \kappa, \lambda)$Lie 点变换群.

如果 $a \neq -\infty$ (不失一般性, 令 $a = 0$) 和 $b = \infty$, 则邻域上的热方程 (4.47) 的边值问题的边界拥有 2 参数 Lie 点变换群, 因而边值问题至多拥有 3 参数 (β, γ, λ) Lie 点变换群且无穷小为

$$\xi(x,t) = \beta x + \gamma x t, \tag{4.181a}$$

$$\tau(t) = 2\beta t + \gamma t^2, \tag{4.181b}$$

$$f(x,t) = -\gamma\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right) + \lambda. \tag{4.181c}$$

现在推导热方程 (4.47) 的基本解, 当

$$u(x,0) = \delta(x - x_0),$$

其中对于无限邻域 $(a = -\infty,\ b = \infty)$ 或半无限邻域 $(a = 0,\ b = \infty)$. $\delta(x - x_0)$ 是中心在 x_0, $a < x_0 < b$ 的 Dirac 函数.

(1) 无限邻域 $(a, b) = (-\infty, \infty)$. 考虑邻域 $t > 0, -\infty < x < \infty$ 上的边值问题

$$u_t = u_{xx}, \tag{4.182a}$$

且边界条件为

$$\begin{aligned} u(\pm\infty, t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \delta(x). \end{aligned} \tag{4.182b}$$

不失一般性, 可以令 $x_0 = 0$.

边值问题 (4.182a,b) 拥有无穷小为 (4.180a~c) 的 Lie 变换群, 假如

$$f(x,0)u(x,0) = \xi(x,0)\delta'(x), \quad \text{当 } u(x,0) = \delta(x),$$

即

$$f(x,0)\delta(x) = \xi(x,0)\delta'(x). \tag{4.183}$$

根据 Dirac 函数 (广义的函数 (Lighthill, 1958)) 的性质可知, (4.183) 成立, 如果有

$$\xi(0,0) = 0, \tag{4.184a}$$

$$f(0,0) = -\xi_x(0,0). \tag{4.184b}$$

因而, 对于无穷小方程 (4.180a~c), 有

$$\kappa = 0, \quad \lambda = -\beta.$$

故边值问题 (4.182a,b) 拥有 3 参数 (β,γ,δ) Lie 点变换群. 该群的无穷小生成元为

$$\begin{aligned} &X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = t\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}xu\frac{\partial}{\partial u}, \\ &X_3 = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} - \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right]u\frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned} \tag{4.185}$$

相应的矩阵

$$\Xi(x,t) = \begin{bmatrix} x & 2t \\ t & 0 \\ xt & t^2 \end{bmatrix}$$

的秩是 $R = 2$, 使得在自变量的个数从 2 约化为零的意义下, 群不变性完全约化为边值问题. 注意

$$X_3 = \frac{1}{2}[tX_1 + xX_2]. \tag{4.186}$$

因此, 源于 X_1, X_2 作用下的不变性的不变解也一定是源于 X_3 的不变解. 令 $u = \Theta(x,t)$ 是源于 X_1, X_2 作用下的不变性的不变解, 则知

$$X_1(u - \Theta(x,t)) = 0, \quad 当\ u = \Theta(x,t)$$

产生不变形式

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\Phi_1(\zeta_1), \tag{4.187}$$

且相似变量为

$$\zeta_1 = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

方程

$$X_2(u - \Theta(x,t)) = 0, \quad 当\ u = \Theta(x,t)$$

导致不变形式

$$u = \Theta(x,t) = \mathrm{e}^{-x^2/4t}\Phi_2(\zeta_2), \tag{4.188}$$

且相似变量为

$$\zeta_2 = t.$$

根据边值问题 (4.182a,b) 的解的唯一性, 有

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\Phi_1(\zeta_1) = \mathrm{e}^{-x^2/4t}\Phi_2(\zeta_2).$$

根据相似变量 ζ_1 , ζ_2, 表示变量 x 和 t, 有

$$\mathrm{e}^{(\zeta_1)^2/4}\Phi_1(\zeta_1) = \sqrt{\zeta_2}\Phi_2(\zeta_2) = \mathrm{const} = c.$$

故边值问题 (4.182a,b) 的解为如下著名的表达式

$$u = \Theta(x,t) = \frac{c}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}, \tag{4.189}$$

其中 c 是某常数. 初值条件 (4.182b) 产生

$$c = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}.$$

注意, 由关系 (4.186) 可知, 一定可得下面的结果

$$X_3\left(u - \frac{c}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}\right) = 0,$$

其中 c 是任意常数.

(2) 半无限邻域 $(a,b) = (0,\infty)$. 考虑邻域 $t > 0$, $x > 0$ 上的边值问题

$$u_t = u_{xx}, \tag{4.190a}$$

且边界条件为

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.190b}$$

$$u(x,0) = \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < \infty. \tag{4.190c}$$

PDE (4.190a), 边界曲线 $t = 0$, $x = 0$, 以及边界条件 (4.190b) 拥有无穷小为 (4.181a~c) 的 3 参数 Lie 变换群. (4.190c) 的初值条件的不变性使得这个约束

$$f(x,0)u(x,0) = \xi(x,0)\delta'(x - x_0), \quad \text{当 } u(x,0) = \delta(x - x_0) \text{ 时},$$

即

$$f(x,0)\delta(x - x_0) = \xi(x,0)\delta'(x - x_0).$$

因而有

$$\xi(x_0,0) = 0, \quad f(x_0,0) = -\xi_x(x_0,0).$$

从而对于无穷小方程 (4.181a~c), 有

$$\beta = 0, \quad \lambda = \frac{1}{4}(x_0)^2\gamma.$$

故边值问题 (4.190a~c) 拥有点变换

$$X = xt\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial t} + \left[\frac{1}{4}(x_0)^2 - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)\right]u\frac{\partial}{\partial u}.$$

相应的不变解具有不变形式

$$u = \Theta(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-[x^2+(x_0)^2]/4t}}{\sqrt{t}}\Phi(\zeta), \tag{4.191}$$

其中 $\Phi(\zeta)$ 是相似变量 $\zeta = \dfrac{x}{t}$ 的任意函数. 将不变形式 (4.191) 代入热方程 (4.190a), 可知 $\Phi(\zeta)$ 满足 ODE

$$\Phi'' = \frac{1}{4}(x_0)^2\Phi.$$

因此, 边值问题 (4.190a~c) 的解具有如下形式

$$u = \Theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}[C\mathrm{e}^{-(x-x_0)^2/4t} + D\mathrm{e}^{-(x+x_0)^2/4t}],$$

其中 C 和 D 是某常数. 由边界条件 (4.190c) 可得 $D = -C$, 由初值条件 (4.190c) 可知 $C = 1/\sqrt{4\pi}$. 这产生边值问题 (4.190a~c) 的众所周知的解

$$u = \Theta(x,t) = G(x - x_0, t) - G(x + x_0, t),$$

通常由想像的方法得到, 其中

$$G(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}.$$

2. 轴对称波方程的基本解

轴对称波方程 (4.88) 的基本解是如下邻域 $r > 0,\ t > 0$ 上边值问题的解

$$Lu = u_{tt} - u_{rr} - \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{2\pi r}\delta(r)\delta(t),$$

即

$$rLu = \frac{1}{2\pi}\delta(r)\delta(t), \tag{4.192a}$$

且因果条件为

$$u \equiv 0, \quad \text{如果} \ r > t. \tag{4.192b}$$

证明线性齐次方程 (留作习题 4.2.7)

$$Lu=0$$

拥有由无穷小生成元

$$X=\rho(r,t)\frac{\partial}{\partial r}+\tau(r,t)\frac{\partial}{\partial t}+f(t)u\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.193}$$

代表的 4 参数 $(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)$ 的 Lie 点变换群, 且无穷小为

$$\rho(r,t)=\alpha r+2\beta rt, \tag{4.194a}$$

$$\tau(r,t)=\alpha t+\beta(r^2+t^2)+\gamma, \tag{4.194b}$$

$$f(t)=-\beta t+\lambda. \tag{4.194c}$$

波阵面 $r=t$ 的不变性使得

$$\rho(t,t)=\tau(t,t),$$

因此有 $\gamma=0$.

在 (4.193) 作用下, 有

$$r^*L^*u^*=\left[1+\varepsilon\left[f(t)-2\tau_t(r,t)+\frac{\rho(r,t)}{r}\right]+O(\varepsilon^2)\right]rLu,$$

$$\delta(r^*)\delta(t^*)=\delta(r)\delta(t)+\varepsilon[\rho(r,t)\delta'(r)\delta(t)+\tau(r,t)\delta(r)\delta'(t)]+O(\varepsilon^2).$$

从而, (4.192a) 拥有 (4.193) 和 (4.194a~c), 如果有

$$\left[f(t)-2\tau_t(r,t)+\frac{\rho(r,t)}{r}\right]\delta(r)\delta(t)=\rho(r,t)\delta'(r)\delta(t)+\tau(r,t)\delta(r)\delta'(t). \tag{4.195}$$

因为 $z\delta'(z)\equiv-\delta(z)$, 在 (4.195) 中利用这个等式且 $z=r,t$ 可知, (4.192a) 拥有 (4.193) 和 (4.194a~c), 如果有

$$\left[f(t)-2\tau_t(r,t)+\frac{2}{r}\rho(r,t)+\frac{1}{t}\tau(r,t)\right]\delta(r)\delta(t)=0. \tag{4.196}$$

方程 (4.196) 约化为

$$\left[\lambda+\alpha+\beta\frac{r^2}{t}\right]\delta(r)\delta(t)=0. \tag{4.197}$$

因为当 $t=0$ 仅仅在波阵面 $r=t$ 上时, (4.197) 才成立, 所以可知 (4.197) 中 β 是任意的, $\lambda=-\alpha$. 因此, 边值问题 (4.192a,b) 拥有 2 参数的 Lie 点变换群且无穷小生成元为

$$X_1=r\frac{\partial}{\partial r}+t\frac{\partial}{\partial t}-u\frac{\partial}{\partial u},\quad X_2=2rt\frac{\partial}{\partial r}+(r^2+t^2)\frac{\partial}{\partial t}-tu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.198}$$

令 $u=\Theta(r,t)$ 是源于 X_1, X_2 共同作用下不变性导致的不变解. 则

$$X_1(u-\Theta(r,t))=0, \quad 当\ u=\Theta(r,t)$$

产生不变形式

$$u=\Theta(r,t)=\frac{1}{t}\Phi_1(\zeta_1), \tag{4.199}$$

且相似变量为

$$\zeta_1=\frac{r}{t},$$

且

$$X_2(u-\Theta(r,t))=0, \quad 当\ u=\Theta(r,t)$$

使得不变形式

$$u=\Theta(r,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\Phi_2(\zeta_2), \tag{4.200}$$

且相似变量为

$$\zeta_2=\frac{1}{r}(t^2-r^2).$$

边值问题 (4.192a,b) 的解的唯一性使得

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\Phi_2(\zeta_2)=\frac{1}{t}\Phi_1(\zeta_1). \tag{4.201}$$

因为

$$t=\frac{\zeta_2\zeta_1}{1-(\zeta_1)^2}, \quad r=\frac{\zeta_2(\zeta_1)^2}{1-(\zeta_1)^2},$$

所以将这些代入 (4.201) 可知

$$\sqrt{\zeta_2}\Phi_2(\zeta_2)=\sqrt{1-(\zeta_1)^2}\Phi_1(\zeta_1)=\text{const}.$$

故有

$$u=\Theta(r,t)=\frac{c}{\sqrt{t^2-r^2}}, \tag{4.202}$$

其中 c 是某常数. 可以证明 $c=1/2\pi$.

3. Fokker-Planck 方程的基本解

作为第三个例子, 考虑含漂流 $\phi(x)$ 的 Fokker-Planck 方程基本解的概率分布. 特别地, 考虑邻域 $t>0$, $a<x<b$ 上的边值问题

$$u_t=u_{xx}+(\phi(x)u)_x, \tag{4.203a}$$

且初值条件为

$$u(x,0)=\delta(x-x_0), \quad a<x_0<b, \tag{4.203b}$$

反射边界 $x=a$, $x=b$ 上有

$$\lim_{x\to a^+,b^-}[u_x+\phi(x)u]=0. \tag{4.203c}$$

令 $u=G(x,t;x_0)$ 是边值问题 (4.203a~c) 的解. 则可知对任意 $x_0, a<x_0<b$, 必有

$$\int_a^b G(x,t;x_0)\mathrm{d}x=1. \tag{4.204}$$

对于具有物理意义的情况, 其中 $\phi(x)$ 是 x 的奇函数, 关于漂流 $\phi(x)$, 考虑边值问题 (4.203a,b) 的群分类问题. 完全详细的结果参看文献 (Bluman, 1967, 1971; Bluman, Cole, 1974).

可以证明, 线性 PDE(4.203a) 拥有点对称

$$\xi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+f(x,t)u\frac{\partial}{\partial u} \tag{4.205}$$

当且仅当

$$\tau(x,t)=\tau(t),$$

$$\xi(x,t)=\frac{1}{2}x\tau(t)+A(t),$$

$$f(x,t)=\frac{1}{2}x\tau(t)+A(t),$$

其中对于给定的漂流 $\phi(x)$, 函数 $A(t), B(t), \tau(t)$ 一定满足

$$P(x,t)+Q(x,t)=0,$$

且

$$P(x,t)=\frac{1}{4}[\phi^2(x)+x\phi(x)\phi'(x)-2\phi'(x)-x\phi''(x)]\tau'(t)+\frac{1}{4}\tau''(t)-\frac{1}{8}x^2\tau'''(t)+B'(t),$$

$$Q(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x)\phi'(x)-\phi''(x)]A(t)-\frac{1}{2}xA''(t).$$

根据 $\phi(x)$ 是 x 的奇函数, 有

$$P(x,t)\equiv 0, \tag{4.206a}$$

$$Q(x,t)\equiv 0. \tag{4.206b}$$

根据恒等式 (4.206a) 可知, 如果 $\tau'(t)\neq 0$, 则漂流 $\phi(x)$ 一定满足一阶 ODE

$$[\phi^2(x)+x\phi(x)\phi'(x)-2\phi'(x)-x\phi''(x)]'''=0, \tag{4.207}$$

进而 Fokker-Planck 方程 (4.203a) 拥有非平凡的点对称 (除了 t 明显的平移变换作用下的不变性).

可以证明, ODE(4.207)(约束条件 $\phi(x)$ 是奇性的) 约化为 Riccati 方程

$$2\phi'(x) - \phi^2(x) + \beta^2 x^2 - \gamma + \frac{16\nu^2 - 1}{x^2} = 0, \tag{4.208}$$

其中 β, γ, ν 是任意常数. 将 (4.208) 代入 (4.206a) 可知, $\tau(t)$ 和 $B(t)$ 一定满足常微分方程组

$$\tau'''(t) = 4\beta^2\tau'(t), \tag{4.209a}$$

$$B'(t) = \frac{1}{4}[\gamma\tau'(t) - \tau''(t)]. \tag{4.209b}$$

根据恒等式 (4.206b) 可知, 如果 $A(t) \neq 0$, 则奇漂流 $\phi(x)$ 一定满足如下的 Riccati 方程

$$2\phi'(x) - \phi^2(x) + \beta^2 x^2 - \gamma = 0. \tag{4.210}$$

将 (4.210) 代入 (4.206b) 可知, $A(t)$ 一定满足 ODE

$$A''(t) = \beta^2 A(t). \tag{4.211}$$

因此, 漂流 $\phi(x)$ 同时满足 ODEs(4.208) 和 (4.210) 当且仅当 $\phi(x)$ 满足 ODE(4.210). 根据 (4.209a,b) 和 (4.211) 可知, 具有奇漂流 $\phi(x)$ 的 Fokker-Planck 方程 (4.203a) 拥有 6 参数的 Lie 点变换群当且仅当 $\phi(x)$ 满足 ODE(4.210). 而且, 如果奇漂流满足 ODE(4.208) 且 $\nu^2 \neq \frac{1}{16}$, 则相应的 Fokker-Planck 方程 (4.203a) 拥有 4 参数 Lie 点变换群.

边界曲线 $t = 0$ 的不变性导致 $\tau(0) = 0$, 因而将参数的个数减少一. 初值条件 (4.203b) 的不变性要求下面的条件

$$\xi(x_0, 0) = 0, \quad f(x_0, 0) = -\xi_x(x_0, 0).$$

因而, 如果奇漂流 $\phi(x)$ 满足 ODE (4.210), 则 (4.203a,b) 拥有 3 参数的 Lie 群; 如果奇漂流 $\phi(x)$ 满足 ODE (4.208) 且 $\nu^2 \neq \frac{1}{16}$, 则 (4.203a,b) 拥有单参数的 Lie 群.

标准的代换

$$\phi(x) = -2\frac{V'(x)}{V(x)}$$

将二阶线性 ODE

$$4V''(x) + \left[\gamma - \beta^2 x^2 - \frac{16\nu^2 - 1}{x^2}\right] V(x) = 0 \tag{4.212}$$

的任意解变换为 Riccati 方程 (4.208) 的解. 因为 ODE(4.212) 在的投影作用下是不变的, 所以它的通解可以表示为如下形式

$$V(x) = c_1V_1(x) + c_2V_2(x),$$

其中 $V_1(x)$, $V_2(x)$ 分别是 x 奇偶函数. 则 $\phi(x)$ 是 x 的奇函数且 ODE(4.208) 当且仅当它具有形式

$$\phi(x) = -2\frac{V_1'(x)}{V_1(x)}$$

或

$$\phi(x) = -2\frac{V_2'(x)}{V_2(x)}.$$

只有 $V_1(x)$ 导致物理意义的漂流. 可以证明

$$V_1(x) = \left[\frac{1}{2}\beta x^2\right]^{\nu+(1/4)} \mathrm{e}^{-\beta x^2/4} M\left(c, d, \frac{1}{2}\beta x^2\right), \tag{4.213}$$

其中 $M(c,d,z)$ 表示 Kummer 的第一类超几何函数且$c = \dfrac{1}{2}+\nu-\gamma/8\beta, d = 1+2\nu, \nu > -\dfrac{1}{2}$, $\beta \neq 0. M(c,d,z)$ 的性质是已知的 (Abramowitz, Stegun, 1970, 13 章).

当 $z \to 0$, 时, 有

$$M(c,d,z) = 1 + \frac{c}{d}z + O(z^2). \tag{4.214a}$$

当 $z \to \infty$ 时, 有

$$M(c,d,z) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(c)} z^{c-d}\mathrm{e}^z \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \tag{4.214b}$$

根据 (4.212a,b) 的渐近性质可知

$$\lim_{x\to 0} x\phi(x) = -(4\nu+1), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{x} = -\beta.$$

存在下面的情况:

情况 I. $\nu^2 = \dfrac{1}{16}$.

这里, (4.203a,b) 拥有 3 参数的 Lie 点变换群且它的无穷小生成元为

$$\begin{aligned} X_1 =& 2\beta x \sinh 2\beta t \frac{\partial}{\partial x} + 4\sinh^2 \beta t \frac{\partial}{\partial t} \\ &+ [\gamma \sinh^2 \beta t - \beta \sinh 2\beta t(1 + x\phi(x)) + \beta^2((x_0)^2 - x^2 \cosh 2\beta t)]u\frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \tag{4.215a}$$

$$X_2 = 2\sinh\beta t\frac{\partial}{\partial x} + [\beta(x_0 - x\cosh\beta t) - \phi(x)\sinh\beta t]u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.215b}$$

$$\begin{aligned}X_3 =& 4\beta(x_0\cosh\beta t - x\cosh 2\beta t)\frac{\partial}{\partial x} - 4\sinh 2\beta t\frac{\partial}{\partial t} + [4\beta\cosh^2\beta t + 2\beta\phi(x) \\ &\times(x\cosh 2\beta t - x_0\cosh\beta t) + 2\beta^2 x(x\sinh 2\beta t - x_0\sinh\beta t) - \gamma\sinh 2\beta t]u\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned} \tag{4.215c}$$

注意

$$X_3 = -2\coth\beta t X_1 + 2\beta(x\,\mathrm{cosech}\,\beta t + x_0\coth\beta t)X_2.$$

令 $u = \Theta(x,t)$ 是源于 3 参数 Lie 点变换群 (4.215a~c) 的不变解, 则由

$$X_1(u - \Theta(x,t)) = 0, \quad 当\ u = \Theta(x,t)$$

可得不变形式

$$u = g_1(x,t)\Phi_1(\zeta_1), \tag{4.216}$$

其中

$$g_1(x,t) = \frac{V_1(x)}{\sqrt{\sinh\beta t}}\exp\left[\frac{\gamma t}{4} + \frac{\beta(x_0)^2}{2(1-\mathrm{e}^{2\beta t})} - \frac{\beta x^2\coth\beta t}{4}\right],$$

且相似变量为

$$\zeta_1 = \frac{x}{2\sinh\beta t}.$$

另一方面, 由

$$X_2(u - \Theta(x,t)) = 0, \quad 当\ u = \Theta(x,t)$$

可得不变形式

$$u = g_2(x,t)\Phi_2(\zeta_2), \tag{4.217}$$

其中

$$g_1(x,t) = V_1(x)\exp\left[\frac{\beta x_0 x}{2\sinh\beta t} - \frac{\beta x^2\coth\beta t}{4}\right],$$

且相似变量为 $\zeta_2 = t$.

假设边值问题 (4.203a,b) 的解是唯一的, 由不变形式 (4.216) 和 (4..217) 相等可得

$$\Phi_2(\zeta_2) = \Phi_2(t) = \frac{D}{\sqrt{\sinh\beta t}}\exp\left[\frac{\gamma t}{4} + \frac{\beta(x_0)^2}{2(1-\mathrm{e}^{2\beta t})}\right],$$

其中 D 是任意常数.

现在分别考虑子情况 $\nu = \pm\dfrac{1}{4}$.

情况 I(a). $\nu = -\dfrac{1}{4}$.

这里有

$$V_1(x) = \mathrm{e}^{-\beta x^2/4} M\left(c, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta x^2\right), \quad c = \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{8\beta}.$$

如果没有投影边界, 即 $a=-\infty$, $b=\infty$, 则在邻域 $t>0, -\infty<x<\infty$ 上, 边值问题 (4.203a,b) 的解为

$$\begin{aligned} u &= G_1(x,t;x_0) \\ &= \frac{D}{\sqrt{\sinh \beta t}} M\left(c, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta x^2\right) \exp\left[\frac{1}{4}\gamma t - \frac{1}{4}\beta(1+\coth \beta t)(x - x_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2\right], \end{aligned} \tag{4.218a}$$

且

$$D = \sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \times \left[M\left(c, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\beta (x_0)^2\right)\right]^{-1}. \tag{4.218b}$$

如果 $a=0$ 是投影边界且 $b=\infty$, 则边值问题 (4.203a,b) 的解为

$$u = G_1(x,t;x_0) + G_1(x,t;-x_0), \quad t>0,\ 0<x<\infty, \tag{4.219}$$

其是 x 的偶函数, 且 (4.219) 中 x 的邻域推广到 $-\infty<x<\infty$. 解 (4.219) 能够代表 $t=0$ 时在 $\pm x_0$ 点处对源的响应.

注意极限情况 $c=0$, 漂流变为 $\phi(x)=\beta x$, 这里解 (4.218a,b) 和 (4.219) 变为已知的 Brown 运动中自由粒子的概率分布.

情况 I(b). $\nu = \frac{1}{4}$.

这里, 有

$$V_1(x) = x\mathrm{e}^{-\beta x^2/4} M\left(c, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\beta x^2\right), \quad c = \frac{3}{4} - \frac{\gamma}{8\beta}, \quad x>0,$$

且 $a=0$ 是投影边界和 $b=\infty$. 由相应的边值问题 (4.203a,b) 得到的解为

$$u = G_2(x,t;x_0) + G_2(x,t;-x_0), \quad t>0, \quad 0<x<\infty,$$

其中

$$G_2(x,t;x_0) = \frac{E}{\sqrt{\sinh \beta t}} x M\left(c, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\beta x^2\right) \exp\left[\frac{1}{4}\gamma t - \frac{1}{4}\beta(1+\coth \beta t)(x - x_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2\right],$$

且

$$E = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{\beta}{4\pi}} \times \left[M\left(c, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\beta (x_0)^2\right)\right]^{-1}.$$

情况 II. $\nu > -\frac{1}{2}$.

这种情况下, 边值问题 (4.203a,b) 仅仅拥有参数 Lie 点变换群, 且无穷小生成元为 (4.215a). 由不变形式 (4.216) 可得不变解. 将 (4.216) 代入 PDE (4.203a) 且令 $\zeta_1 = \zeta$, $\Phi_1(\zeta_1) = \Phi(\zeta)$, 可知 $\Phi(\zeta)$ 满足二阶线性 ODE, 且它的通解可由修正的 Bessel 函数来表示

$$\Phi(\zeta) = \zeta^{1/2}[A_1 I_{2\nu}(\beta x_0 \zeta) + A_2 I_{-2\nu}(\beta x_0 \zeta)], \quad x > 0,$$

$$\Phi(\zeta) = |\zeta|^{1/2}[B_1 K_{2\nu}(\beta x_0 |\zeta|) + B_2 I_{2\nu}(\beta x_0 |\zeta|)], \quad x < 0,$$

其中 A_1, A_2, B_1, B_2 是任意常数, 且约束于边界和连续性条件. 当 $t \to 0, \zeta \to \infty$. 由文献 (Watson, 1922, 7.23 节) 可知, 当 $z \to \infty$ 时, 有

$$K_{2\nu}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right],$$

$$I_{2\nu}(z) = \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-z}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

可以证明, 当 $A_2 = B_1 = B_2 = 0$ 时, 可得满足条件 $\nu \neq -\dfrac{1}{4}, t > 0, x > 0$ 的解 (即 $x = 0$ 是投影边界), 其中常数

$$A_1 = 2(x_0)^{-2\nu}\left(\frac{1}{2}\beta\right)^{(3/4)-\nu}\left[M\left(c, d, \frac{1}{2}\beta(x_0)^2\right)\right]^{-1}.$$

可以证明, 当 $x = a$ 时, 投影边界条件 (4.203c) 拥有点对称 (4.215). 重要的结论是守恒律方程

$$\int_0^\infty G(x, t; x_0)\mathrm{d}x = 1$$

拥有 (4.215a), 因而概率分布的所有能率能够从这个不变性和连续的高阶能率来计算 (Bluman, Cole, 1974, p.272~274).

漂流满足 $\phi(x) = \beta x + \alpha/x$ 是有意义的特殊情况, 留作习题 4.4.8.

求解具有变时间系数的更广类的 Fokker-Planck 方程的基本解问题是通过将其映成热方程 (映成 Wiener 过程) 来实现的 (Bluman, 1980; Bluman, Shtelen, 1998). 对于 Fokker-Planck 方程各种例子的点对称, 参看文献 (Stognii, Shtelen, 1991; Cicogna, Vitali, 1990; Rudra, 1990).

有关利用点对称来求线性标量 PDEs 的基本解的问题, 可参考文献 (Aksenov, 1995). Rosinger, Walus (1994) 给出了一般的假设来考虑广义解的群不变性.

可利用群不变性求解形如 (4.58) 的非线性 Diffusion 方程的边值问题, King (1989, 1991) 给出很多这方面的例子.

4.4.2 一个线性标量 PDE 的不完全不变性

考虑定义在邻域 Ω 上的 $k(k \geqslant 2)$ 阶线性标量 PDE

$$Lu = g(x) \tag{4.220a}$$

的边值问题, 且线性边界条件为

$$L_\alpha u = h_\alpha(x), \tag{4.220b}$$

限制在边界曲面

$$\omega_\alpha(x) = 0, \tag{4.220c}$$

其中 L 是 k 阶线性算子, L_α 是阶至多 $k-1$ 的线性算子 $\alpha = 1, 2, \cdots, s$. 假设边值问题 (4.220a~c) 有唯一解. 形式上, 边值问题 (4.220a~c) 的解可以表示为

$$u = u_0 + \sum_{\beta=1}^{s} u_\beta,$$

其中 u_0 满足

$$Lu_0 = g(x), \quad x \in \Omega,$$

$$L_\alpha u_0 = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s,$$

且 u_β 满足

$$\begin{aligned} &Lu_\beta = 0, \quad x \in \Omega, \\ &L_\alpha u_\beta = \delta_{\alpha\beta} h_\alpha(x), \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s \end{aligned}$$

($\delta_{\alpha\beta}$ 是 Kronecker 符号).

边值问题 (4.220a~c) 的解约化为两种类型边值问题的解:

(1) 线性非齐次 PDE 且具有 s 个线性齐次边界条件

$$Lu = g(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.221a}$$

$$L_\alpha u = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s. \tag{4.221b}$$

(2) 线性齐次 PDE 且具有 $s-1$ 个线性齐次边界条件和线性非齐次边界条件 (不失一般性, 第 s 个线性边界条件是非齐次的):

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.222a}$$

$$L_\alpha u = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s-1, \tag{4.222b}$$

$$L_s u = h(x), \quad \omega_s(x) = 0. \tag{4.222c}$$

现在考虑齐次边值问题

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4.223a}$$

$$L_\alpha u = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s, \tag{4.223b}$$

其辅助于给定的边值问题 (4.220a~c). 假设 (4.223a) 拥有非平凡无穷小生成元

$$X_1 = \xi_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + f(x)u\frac{\partial}{\partial u}, \tag{4.224}$$

且 $\xi(x) \neq 0$. 显然, 齐次边值问题 (4.223a,b) 拥有

$$X_2 = u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.225}$$

关于 (1) 的解, 令

$$u = \Phi(x; \lambda) \tag{4.226}$$

是不变形式, 其关于无穷小生成元 $X_\lambda = X_1 + \lambda X_2$ 作用下边值问题 (4.223a,b) 的不变性, 其中 λ 是任意复常数. 则不变形式的叠加

$$u = \sum_\lambda \Phi(x; \lambda) \tag{4.227}$$

满足边值问题 (4.221a,b), 如果

$$\sum_\lambda L\Phi(x; \lambda) = g(x), \tag{4.228}$$

以及对于求和 (4.227) 中的每个 λ, 如果有

$$L_\alpha \Phi(x; \lambda) = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \cdots, s, \tag{4.229}$$

(4.227) 中叠加 $\sum_\lambda$ 也可以表示为复 λ 平面上的积分 $\int_\Gamma \mathrm{d}\lambda$, 其中 Γ 是某曲线. 典型地, 对于任意 $x_0 \in \Omega$, 可以求解 (4.228) 得 $g(x) = \delta(x - x_0)$. 因此, 对于任意 $g(x)$, Green 函数的叠加可用于求解边值问题 (4.221a,b).

对于 (2) 的解, 令

$$u = \Theta(x; \lambda) \tag{4.230}$$

是 (4.222a,b) 的更一般的不变解, 且源于 X_λ, 作用下的不变性, 该解通常仅仅对某些复特征值 λ 才存在. 那样不变解的叠加

$$u = \sum_\lambda \Theta(x; \lambda) \tag{4.231}$$

满足边值问题 (4.222a~c), 假如

$$\sum_{\lambda} L_s \Theta(x;\lambda) = h(x), \quad \omega_s(x) = 0. \tag{4.232}$$

(4.231) 中的叠加$\sum_{\lambda}$ 也可以表示为复 λ 平面上的积分 $\int_{\Gamma} \mathrm{d}\lambda$, 其中 Γ 是某曲线. 可以选择适当的叠加以满足 (4.232). 典型地, 对于任意 $x_0 \in \Omega$, 首先求解 (4.232) 得到 $h(x) = \delta(x - x_0)$, 然后对于任意 $h(x)$, 用 Green 函数的叠加来求解边值问题 (4.222a~c).

下面利用例子来说明:

(1) 有限空间邻域中的热方程的基本解.

(i) 具有线性齐次边界条件的非齐次热方程. 考虑定义在邻域 $t > 0, 0 < x < 1$ 上的非齐次热方程

$$Lu = u_t - u_{xx} = \delta(x - x_0)\delta(t) \tag{4.233a}$$

的边值问题, 其中 $0 < x_0 < 1$, 且线性齐次边界条件为

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{4.233b}$$

显然, $Lu = 0$ 和齐次边界条件 (4.233b) 拥有如下点对称 (t 的平移变换作用下不变性)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t},$$

由点对称 $X_\lambda = \dfrac{\partial}{\partial t} + \lambda u \dfrac{\partial}{\partial u}$ 作用下不变性所得到的不变量为

$$u = \Phi(x,t;\lambda) = y(x;\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{4.234}$$

现在考虑不变形式的叠加

$$u = \sum_{\lambda} y(x;\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}. \tag{4.235}$$

将 (4.235) 代入 PDE(4.233a), 可得

$$\sum_{\lambda} (y_{xx} - \lambda y)\mathrm{e}^{\lambda t} = -\delta(x - x_0)\delta(t). \tag{4.236}$$

为了满足齐次边界条件 (4.233b), 要求对叠加 (4.235) 中的任意 λ, 有

$$y(0;\lambda) = y(1;\lambda) = 0. \tag{4.237}$$

源于 (4.234) 的自然的叠加 (4.235) 是可逆的 Laplace 变换, 它代表边值问题 (4.233a, b) 的解, 即

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} y(x;\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda, \tag{4.238}$$

其中 $\gamma\in \mathrm{R}$ 位于复 λ 平面中 $y(x;\lambda)$ 的所有奇异性的右侧 (这个叠加积分是已知的 Bromwich 围道). 形式上,

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}\lambda.$$

因而, $y(x;\lambda)$ 满足 ODE

$$y_{xx}-\lambda y=-\delta(x-x_0), \tag{4.239}$$

以及边界条件 (4.237). 从而有

$$y(x;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}x\sinh\sqrt{\lambda}(x_0-1)}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}}, & 0<x<x_0,\\[2ex] \dfrac{\sinh\sqrt{\lambda}x_0\sinh\sqrt{\lambda}(x-1)}{\sqrt{\lambda}\sinh\sqrt{\lambda}}, & x_0<x<1.\end{cases}$$

利用残数计算, 可以获得边值问题 (4.233a,b) 的下面的解, 其对于很大的 t 的值是有用的

$$u(x,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}\sin n\pi x_0\sin n\pi x. \tag{4.240}$$

沿着 Laplace 逆变换的 Bromwich 围道, 利用 $y(x;\lambda)$ 的渐近展开, 其对于很大 $|\lambda|$ 的值是有效的, 可得边值问题 (4.233a,b) 的下面的解

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[G(x-x_0-2n,t)-G(x+x_0+2n,t)],$$

这对于很小的 t 的值是有用的, 其中

$$G(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4t}.$$

原则上, 这里提出的途径可以应用于线性 PDE 的任意边值问题中, 且该线性 PDE 具有齐次 PDE 和它的齐次边界条件所拥有的一个非平凡的点对称, 另外, 该对称也被一个边界曲面所拥有, 且在这个曲面上没有强加边界条件. 利用辅助与点对称的正则坐标 $r(x,y)$, $s(x,y)$ 可以继续进行. 那么被变换的边值问题中 $\partial/\partial s$ 的角色类似与边值问题 (4.233a,b) 中 $\partial/\partial t$ 的角色. 被变换的边值问题的解表示是 Laplace 逆变换且 s 具有 t 的角色.

(ii) 具有线性非齐次边界条件的齐次热方程. 考虑线性热方程的边值问题

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \tag{4.241a}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{4.241b}$$

$$u(x,0) = h(x). \tag{4.241c}$$

显然, (4.241a,b) 拥有如下点对称

$$X_\lambda = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial}{\partial u}$$

有关不变解的不变形式为

$$u = \Theta(x,t;\lambda) = y(x;\lambda)\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{4.242}$$

它满足 (4.241a,b) 当且仅当

$$\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2,$$

且

$$y(x;\lambda_n) = a_n \sin n\pi x,$$

其中 a_n 是任意常数, $n = 1, 2, \cdots$, 如果 $h(x) = \delta(x - x_0)$, 则不变解的叠加

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta(x,t;\lambda_n)$$

满足初值条件, 如果 $a_n = 2\sin n\pi x_0$. 显然, 这是解表示 (4.240), 因为当 $h(x) = \delta(x - x_0)$ 时, 边值问题 (4.233a,b) 和 (4.241a~c) 是等价的问题. 令

$$K(x,t;x_0) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x_0 \sin n\pi x.$$

则边值问题 (4.241a,b) 的解为

$$u(x,t) = \int_0^1 h(x_0) K(x,t;x_0)\mathrm{d}x_0.$$

(2) Stefan 逆问题.

用如下边值问题

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < X(t), \quad t > 0, \tag{4.243a}$$

$$u(X(t),t) = 0, \quad t > 0, \tag{4.243b}$$

$$u_x(0,t) = h_1(t), \quad t > 0, \tag{4.243c}$$

$$u(x,0) = h_2(x), \quad 0 < x < 1, \tag{4.243d}$$

$$h_3(t) = ku_x(X(t),t) - X'(t), \quad t > 0 \tag{4.243e}$$

给定的 Stefan 逆问题来说明非平凡的例子, 其中对于规定可移边界 $X(t), X(0) = 1$, 任意初始分布 $h_2(x)$, 固定的常数 k 和任意的流 $h_1(t)$, 目的是确定 $u(x,t)$ 和流 $h_3(t)$ 使得边值问题 (4.243a~e) 是可解的.

我们的策略是首先获得 (4.243a~c) 的解 $u = \Theta_1(x,t)$. 然后通过求解 (4.243a~d) 且 $h_1(t) \equiv 0$ 和 $u(x,0) = h_2(x) - \Theta_1(x,0)$ 获得第二个函数 $u = \Theta_2(x,t)$, 它是第二个边值问题的唯一解. 从而边值问题 (4.243a~c) 的解为 $u = \Theta_1(x,t) + \Theta_2(x,t)$, 且

$$h_3(t) = k\left[\frac{\partial \Theta_1}{\partial x}(X(t),t) + \frac{\partial \Theta_2}{\partial x}(X(t),t)\right] - X'(t).$$

关于该例子的详细内容, 参见文献 (Bluman, Cole, 1974, p. 213~219, 235~245; Bluman, 1974).

考虑热方程 (4.44) 拥有的 6 参数 Lie 点变换群且它的无穷小生成元为 (4.49a~c). 可以证明, 该群使得一固定曲线表示为移动边界 $x = X(t)$ 且 $X(0) = 1$ 保持不变当且仅当 $\kappa = \delta = 0$. 通过求解所得到的 ODE

$$\xi(X(t),t) = \tau(t)X'(t), \quad X(0) = 1,$$

可以证明, $X(t)$ 一定具有形式

$$X(t) = \sqrt{1 + 2\beta t + \gamma t^2},$$

其中 β, γ 是任意常数. 现在检验有意义的子情况 $\gamma = \beta^2$.

$$X(t) = 1 - \frac{t}{T}, \quad T = -\beta^{-1}. \tag{4.244}$$

如果 $X(t)$ 具有形式 (4.244), 则 (4.243a,b) 拥有

$$X_1 = \beta x(1+\beta t)\frac{\partial}{\partial x} + (1+\beta t)^2\frac{\partial}{\partial t} - \beta^2\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}t\right)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.245}$$

考虑情况 $T > 0$, 使得 $0 < t < T$, 即 $X'(t) < 0$, 这相应于 “熔化” 状态且当 $t = T$. 是完全熔化. 相应的相似变量为

$$\zeta = \frac{x}{X(t)} = \frac{x}{1 - \dfrac{t}{T}}, \quad 0 < \zeta < 1, \tag{4.246}$$

且 $\zeta = 0$ 对应于 $x = 0$, $\zeta = 1$ 对应于 $x = X(t) = 1 - t/T$.

相似曲线 (不变曲线) $\zeta = \text{const}$ 显示在图 4.1 中.

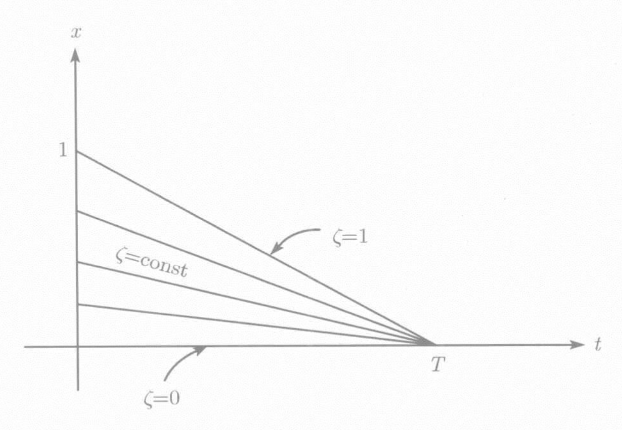


图 4.1 不变曲线 $\zeta = \text{const}$

对应于无穷小生成元 $X_\lambda = X_1 + \lambda u \dfrac{\partial}{\partial u}$ 的不变形式为

$$u = \Phi(x,t;\nu) = \frac{1}{\sqrt{X(t)}} \exp\left[-\frac{\nu^2 T}{X(t)} + \frac{\zeta^2 X(t)}{4T}\right] y(\zeta;\nu), \tag{4.247}$$

且

$$\nu^2 = \lambda - \frac{1}{2}T^{-1}. \tag{4.248}$$

将不变形式 (4.247) 代入热方程 (4.243a) 可知, $y(\zeta;\nu)$ 满足 ODE

$$y_{\zeta\zeta} + \nu^2 y = 0. \tag{4.249}$$

由边界条件 (4.243b) 有

$$y(1;\nu) = 0, \tag{4.250}$$

使得

$$y(\zeta;\nu) = A(\nu)\sin\nu(\zeta - 1), \tag{4.251}$$

其中 $A(\nu)$ 是任意常数. 因而不变解的任意形式的叠加

$$u = \sum_\nu \frac{A(\nu)}{\sqrt{X(t)}} \exp\left[-\frac{\nu^2 T}{X(t)} + \frac{\zeta^2 X(t)}{4T}\right] \sin v(\zeta - 1) \tag{4.252}$$

满足齐次问题 (4.243a,b).

现在, 令

$$r = \frac{t}{X(t)}, \quad s = -\nu^2, \quad B(s) = \frac{2\pi \mathrm{i}}{\sqrt{T}} \mathrm{e}^{-\nu^2 T} A(\nu),$$

且用 $\sum_\nu \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} \mathrm{d}s$ 代替. 因此, 根据 Laplace 逆变换, 形式上可得边值问题 (4.243

a~c) 下面的解表示

$$u=\Theta_1(x,t)=\sqrt{r+T}\mathrm{e}^{\zeta^2/4(r+T)}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty}B(s)\sinh[\sqrt{s}(1-\zeta)]\mathrm{e}^{sr}\mathrm{d}s. \tag{4.253}$$

令

$$H(r)=h_1(t)=h_1\left(\frac{rT}{r+T}\right),$$

然后取 (4.235) 的逆, 使得边界条件 (4.243c) 成立, 有

$$B(s)=-\frac{\beta}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}}\int_0^{\infty}\frac{H(r)}{(r+T)^{3/2}}\mathrm{e}^{-sr}\mathrm{d}r. \tag{4.254}$$

继续求 $\Theta_2(x,t)$, 令

$$H_2(x)=h_2(x)-\Theta_1(x,0),$$

考虑边值问题 (4.243a~d), 且 $h_1(t)\equiv 0$, 用 $H_2(x)$ 代替 $h_2(x)$. 特别地, 考虑边值问题

$$u_t=u_{xx},\quad 0<x<X(t),\quad t>0, \tag{4.255a}$$

$$u(X(t),t)=0,\quad t>0, \tag{4.255b}$$

$$u_x(0,t)=h_1(t),\quad t>0, \tag{4.255c}$$

$$u(x,0)=H_2(x),\quad 0<x<1, \tag{4.255d}$$

$X(t)$ 且由 (4.244) 确定. 容易验证 (4.255a~c) 拥有点对称 (4.245). 从而可得相似变量 (4.246). 由无穷小生成元 $X_\lambda=X_1+\lambda u\dfrac{\partial}{\partial u}$ 可得不变形式 (4.247), (4.248). 将 (4.247) 代入热方程 (4.255a) 可得 ODE(4.249). 则对于 ODE (4.249), 由边界条件 (4.255b,c) 可得齐次边界条件 (4.250) 和

$$y_\zeta(0;\nu)=0. \tag{4.256}$$

故有

$$\nu=\nu_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad y(\zeta;\nu_n)=A_n\cos\nu_n\zeta,$$

其中 A_n 是任意常数, $n=0,1,2,\cdots$, 不变解的形式叠加

$$u=\Theta_2(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{\sqrt{X(t)}}\exp\left[-\frac{(\nu_n)^2T}{X(t)}+\frac{\zeta^2X(t)}{4T}\right]\cos v_n\zeta \tag{4.257}$$

满足 (4.255a~c). 令

$$H_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\exp\left[\frac{x^2}{4T}-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2T\right]\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x.$$

则初始条件 (4.255d) 成立.

令$\psi_n(x) = \cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi x, n = 0,1,2,\cdots$, 则特征函数集 $\{\psi_n(x)\}$ 构成区间 [0,1] 上函数的完全正交集, 且 $\int_0^1 \psi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\delta_{nm}$. 因而有

$$A_n = 2\mathrm{e}^{(n+1/2)^2\pi^2 T}\int_0^1 H_2(x)\psi_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/4T}\mathrm{d}x, \quad n = 0,1,2,\cdots.$$

上面的解已经被用于发展为数值程序来求解由边值问题 (4.243a~e) 描述的直接非线性 Stefan 问题, 这里目的是, 对于任意 $h_1(x), h_2(t), h_3(t)$ 和常数 k , 求未知移动边界 $X(t)$ 和分布 $u(x,t)$(Milinazzo, 1974; Milinazzo, Bluman, 1975).

4.4.3 线性偏微分方程组的不完全不变性

考虑邻域 $-\infty < x < \infty,\ t > 0$ 上线性波方程组

$$v_t = u_x, \tag{4.258a}$$

$$u_t = c^2(x)v_x \tag{4.258b}$$

的初值问题

$$u(x,0) = U(x), \tag{4.258c}$$

$$v(x,0) = V(x), \tag{4.258d}$$

考虑物理意义波速 $c(x)$, 它是在 4.3.4 节中得到的且满足 ODE

$$c' = m\sin(\upsilon\log c), \quad \upsilon = \text{const}. \tag{4.259}$$

可以证明, 对于 ODE(4.259) 的任意解, 波速 $c(x)$ 是 x 的单调函数. 特别地, 对于相应的波方程 (4.147), 波速 $c(x)$ 描述了含光滑转变的 2 层媒介中波进展, 且有性质

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = 1, \tag{4.260a}$$

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \mathrm{e}^{\pi/\nu} = \gamma, \quad \gamma > 0, \tag{4.260b}$$

$$\max_{x\in(-\infty,\infty)} c'(x) = m, \quad m > 0, \tag{4.260c}$$

其中 γ, m 是独立参数, γ 代表渐近波速的比率 (通过适当的尺度变换, 容易将这里提出的结果适应于如下情况)

$$\lim_{x\to-\infty} c(x) = c_1 > 0, \quad \lim_{x\to\infty} c(x) = c_2 > 0,$$

注意, 不失一般性, 根据 x 的平移变换作用下 ODE (4.259) 的不变性, 可以令 $c'(0) = m$. 图 4.2 显示了那样波速 $c(x)$ 的典型剖面.

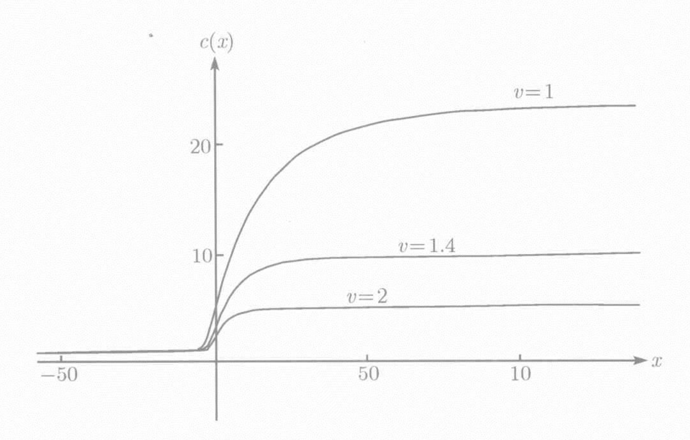


图 4.2　波速为 $c(x)$ 的典型剖面

当 $c(x)$ 满足一阶 ODE(4.259) 时, 偏微分方程组 (4.258a,b) 拥有 4 参数 Lie 点变换群 (4.160). 容易证明, 点对称 $X = X_2 + X_3$ 保持曲线 $t = 0$ 不变. 可以证明, 给定偏微分方程组 (4.258a,b) 的相应的不变解源于对所有整数 n,

$$X + 4\upsilon ni\left[u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right] \tag{4.261}$$

作用下它的不变性.

对于 $n = 0, 1, 2, \cdots$, 这些不变解为

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{\sin y}\mathrm{e}^{-2ni\arctan[\cot y\,\mathrm{sech}(m\upsilon t)]} \times \begin{bmatrix} c^{1/2}(x) & 0 \\ 0 & c^{-1/2}(x) \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \sqrt{\cosh(m\upsilon t) + \sinh(m\upsilon t)\cos y} & \sqrt{\cosh(m\upsilon t) - \sinh(m\upsilon t)\cos y} \\ \sqrt{\cosh(m\upsilon t) + \sinh(m\upsilon t)\cos y} & -\sqrt{\cosh(m\upsilon)t - \sinh(m\upsilon t)\cos y} \end{bmatrix} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} f_n(z) \\ g_n(z) \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.262}$$

其中

$$y = \upsilon\log c(x), \quad z = \sinh(m\upsilon t)\sin y, \quad \begin{bmatrix} f_n(z) \\ g_n(z) \end{bmatrix} = M_n(z)\begin{bmatrix} f_0(z) \\ g_0(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix},$$

且

$$\begin{bmatrix} f_0(z) \\ g_0(z) \end{bmatrix} = (z^2+1)^{-1/2}\begin{bmatrix} \cos\psi(z) & \sin\psi(z) \\ -\sin\psi(z) & \cos\psi(z) \end{bmatrix}, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\upsilon}\log\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$

$$M_n(z) = R_n(z) \times R_{n-1}(z) \times \cdots \times R_1(z) \times R_0(z), \quad R_0(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对于 $n \geqslant 1$, 有

$$R_n(z) = \begin{bmatrix} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{z-i}{z+i}\right) - \frac{1}{4}\upsilon^{-2} & \frac{i-2nz}{2\upsilon\sqrt{z^2+1}} \\ \frac{2nz+i}{2\upsilon\sqrt{z^2+1}} & \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{z+i}{z-i}\right) - \frac{1}{4}\upsilon^{-2} \end{bmatrix}$$

根据初始数据 (4.258c,d), 对于每个不变解对 $(u_n(x,t), v_n(x,t))$, 分别选择常数 P_n, Q_n.

对于 $n = -1, -2, \cdots$, 通过

$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_{-n}(x,t) \\ \bar{v}_{-n}(x,t) \end{bmatrix},$$

且根据不变解 (4.262), 相应的不变解可以被表示.

从而, 初值问题 (4.258a~d) 的解可以形式地表示为

$$\begin{bmatrix} u(x,t) \\ v(x,t) \end{bmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{bmatrix} = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} u_n(x,t) \\ v_n(x,t) \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} u_0(x,t) \\ v_0(x,t) \end{bmatrix}.$$

现在可以确定常数 P_n , Q_n, 首先, 注意

$$u_n(x,0) = (-1)^n (P_n + Q_n)\sqrt{c(x)\sin y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2ny}, \tag{4.263a}$$

$$v_n(x,0) = (-1)^n (P_n - Q_n)\sqrt{\frac{\sin y}{c(x)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2ny}, \tag{4.263b}$$

$0 < y < \pi$. 故从 Fourier 级数表示 (4.263a,b), 可得

$$P_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2ny}(\sin y)^{-1/2}[\mathrm{e}^{-y/2\upsilon}U(x(y)) + \mathrm{e}^{y/2\upsilon}V(x(y))]\mathrm{d}y,$$

$$Q_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2ny}(\sin y)^{-1/2}[\mathrm{e}^{-y/2\upsilon}U(x(y)) - \mathrm{e}^{y/2\upsilon}V(x(y))]\mathrm{d}y.$$

对于给定的初值问题 (4.258a~d), 通过确定常数 P_n, Q_n, $n = 1, 2, \cdots$, 可以直接计算任意时间 t ($0 < t < \infty$.) 的解. 注意, 正如基于特征方法的数值程序, 不要求时间步进式. 这些解和它们的性质的全部详细推导参见文献 (Bluman, Kumei, 1988).

习 题 4.4

1. 证明定理 4.4.1.1.
2. 证明定理 4.4.1.2.

3. 证明定理 4.4.1.3.

4. 通过用源于下面的无穷小生成元 (4.185) 的组合

(a) X_1, X_3;

(b) X_2, X_3

的不变形式, 求无限空间邻域 $(a, b) = (-\infty, \infty)$ 中热方程 (4.47) 的基本解.

5. 由于地球表面的周期温度变化, 地球表面附近寻找定态温度分布问题可以近似地约化为寻找如下边值问题的定态解

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \ 0 < t < \infty, \tag{4.264a}$$

$$u(x, 0) = h(x), \tag{4.264b}$$

$$u(0, t) = A\cos\omega t, \tag{4.264c}$$

$$u(\infty, t) = 0. \tag{4.264d}$$

(a) 证明: 边值问题 (4.264a~d) 的定态解与最初分布 $h(x)$ 无关.

(b) 令 $v(x, t)$ 满足

$$v_t = v_{xx}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \tag{4.265a}$$

$$v(0, t) = Ae^{i\omega t}, \tag{4.265b}$$

$$v(\infty, t) = 0. \tag{4.265c}$$

求边值问题 (4.625a~c) 所拥有的单参数 Lie 点变换群. 进一步求所导致的 (4.625a~c) 的不变解.

(c) 求边值问题 (4.624a~d) 的定态解.

6. 求 Euler-Poisson-Darboux 方程, 即

$$u_{xx} + \frac{\lambda}{x}u_x - u_{tt} = \delta(x - x_0)\delta(t) \tag{4.266}$$

的基本解 (Riemann 函数), 该解是多元气体等熵流的源解, 其中 x 是气体的声速, t 是某个固定方向的流速, u 是时间变量, 常数 λ 与气体的比热的比率有关.

(a) 证明: (4.266) 拥有点对称

$$X = -\frac{2xt}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x} + \left[\frac{(x_0)^2 - x^2 - t^2}{\lambda}\right]\frac{\partial}{\partial t} + tu\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.267}$$

(b) 证明: 源于点对称 (4.267) 的相似变量为

$$\zeta = \frac{(x - x_0)^2 - t^2}{x}. \tag{4.268}$$

(c) 推导所导致的不变解的不变形式.

(d) 证明：PDE(4.266) 的解为

$$u = u(x,t;x_0) = \frac{(2x_0)^\lambda}{[(x+x_0)^2 - t^2]^{\lambda/2}} F\left(\frac{1}{2}\lambda, \frac{1}{2}\lambda; 1; \frac{(x-x_0)^2 - t^2}{(x+x_0)^2 - t^2}\right),$$

其中 $F(a,b;c;z)$ 是超几何函数 (Bluman, 1967).

7. 对于含非线性恢复力的振荡弦, 考虑由于单位脉冲导致的响应的边值问题

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = \delta(x)\delta(t),$$

$$u \equiv 0, \quad \text{如果 } x > t,$$

且

$$f(u) = -f(-u), \quad f(u) > 0, \quad u > 0.$$

(a) 求该边值问题拥有的点对称.

(b) 求所导致的不变解的不变形式.

(c) 对于情况 $f(u) = ku^3$, 研究在合适相平面上的解. 对于波前 $x = t$ 必须要求什么条件?

8. 考虑 Fokker-Planck 方程

$$u_t = u_{xx} + (\phi(x)u)_x, \quad t > 0, \ 0 < x < \infty, \tag{4.269a}$$

且漂移为

$$\phi(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta x, \quad \alpha < 1, \ \beta > 0,$$

初始条件为

$$u(x,0) = \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < \infty. \tag{4.269b}$$

(a) 求边值问题 (4.269a,b) 拥有的点对称 X.

(b) 令 $u(x,t;x_0)$ 是边值问题 (4.269a,b) 的解. 因为守恒律方程

$$\int_0^\infty u(x,t;x_0)\mathrm{d}x = 1 \tag{4.270}$$

对于 t, x_0, 的所有值恒成立, 因此 (4.270) 必须拥有点对称 X. 于是, 利用点对称作用下守恒律 (4.270) 的不变性, 不需要显式地确定 X, 就可以证明：边值问题 (4.269a,b) 的解 $u(x,t;x_0)$ 的第二个力矩为

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^\infty x^2 u(x,t;x_0)\mathrm{d}x = \left(\frac{1-\alpha}{\beta}\right)(1 - \mathrm{e}^{-2\beta t}) + (x_0)^2 \mathrm{e}^{-2\beta t}. \tag{4.271}$$

(c) 证明: 边值问题 (4.269a,b) 的解由点对称 X 作用下不变性所导致的如下不变解给定

$$u(x,t;x_0) = \beta\sqrt{\frac{x_0\zeta}{2\sinh\beta t}}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha/2}\exp\left[\frac{1}{2}(1-\alpha)\beta t - \frac{1}{4}\beta(1+\coth\beta t)(x-x_0\mathrm{e}^{-\beta t})^2\right] \times I_{-(1/2)(1+\alpha)}(\beta x_0\zeta), \tag{4.272}$$

其中相似变量为$\zeta = \dfrac{x}{2\sinh\beta t}$, $I_\nu(z)$ 是修正的 Bessel 函数.

(d) 利用 (4.270)~(4.272) 以及所有的力矩必须拥有点对称来推导包含 $I_\nu(z)$ 的定积分的显式表达式 (Bluman, Cole, 1974).

9. 利用群方法求 $n \geqslant 2$ 空间维的热方程的基本解, 即求解初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad t>0, \ -\infty < x_i < \infty, \quad i=1,2,\cdots,n,$$

且

$$u(x_1,x_2,\cdots,x_n,0) = \delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n).$$

10. 考虑重力场中且在剪切风影响下, 瞬时线粒子源的扩散的 Green 函数的寻找问题 (Neuringer, 1968; Bluman and Cole, 1974). 该问题约化为在邻域 $t>0$, $-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, -\infty<y_0<\infty$ 中求解初值问题

$$u_t + yu_x - u_y - \mathrm{d}(u_{xx}+u_{yy}) = 0, \tag{4.273a}$$

$$u(x,y,0) = \delta(x)\delta(y-y_0), \tag{4.273b}$$

(a) 证明: 初值问题 (4.237a,b) 拥有点对称

$$X_1 = t^2\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial y} + \mathrm{d}^{-1}(y_0 - y - t)u\frac{\partial}{\partial u},$$

$$X_2 = (t^3-6t)\frac{\partial}{\partial x} + 3t^2\frac{\partial}{\partial y} + 3\mathrm{d}^{-1}\left(x - \frac{1}{2}t^2 - yt\right)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{4.274}$$

(b) 求分别由无穷小生成元 X_1, X_2 所导致的初值问题 (4.237a,b) 的解的不变形式. 然后证明初值问题 (4.237a,b) 的解约化为求解一阶 ODE.

(c) 证明: 初值问题 (4.237a,b) 的解为

$$u(x,y,t) = \frac{1}{4d\pi t\sqrt{1+\dfrac{1}{12}t^2}}\exp\left[-\frac{1}{16d}\left(\frac{[2x-(y+y_0)t]^2}{t\left[1+\dfrac{1}{12}t^2\right]} + 4\frac{(y-y_0+t)^2}{t}\right)\right]. \tag{4.275}$$

(d) 用点对称 (4.274), 不需要用显式解 (4.275), 直接计算力矩 $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle xy\rangle, \langle x^2\rangle$, $\langle y^2\rangle$ 等.

11. Poisson 核是

$$\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 \leqslant r < 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \tag{4.276a}$$

的解, 且

$$u(1,\theta) = \delta(\theta). \tag{4.276b}$$

(a) 令 $z = re^{i\theta}$. 证明边值问题 (4.276a,b) 拥有无穷参数 Lie 点变换群, 相应的无穷小生成元为

$$X_\infty = rS(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r} + T(r,\theta)\frac{\partial}{\partial \theta} + \lambda u\frac{\partial}{\partial u},$$

其中

$$S(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(z^n - \bar{z}^{-n}) + b_n(z^{-n} - \bar{z}^n)], \quad \bar{z} = re^{-i\theta},$$

$T(r,\theta)$ 是 $S(r,\theta), T(1,0) = 0, \lambda = -T_\theta(1,0)$ 的谐共轭, $a_n, b_n, n = 1,2,\cdots$ 是任意复参数.

(b) 考虑情况 $a_1 = a \neq 0, b_1 = b \neq 0, a_j = b_j = 0, j \neq 1$ 下的子群. 证明: 边值问题 (4.276a,b) 拥有 2 参数子群, 其由如下无穷小生成元确定:

$$X_1 = (1-r^2)\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \left[\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta - 2\right]\frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$X_2 = (r^2-1)\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} + \left(r + \frac{1}{r}\right)\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - 2u\frac{\partial}{\partial u}.$$

(c) 证明: 源于点对称 X_1 的不变解具有不变形式 $u = \Phi(\zeta)$, 且相似变量为

$$\zeta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

(d) 当 $u = \Phi(\zeta)$ 时, 利用不变曲面条件 $X_2(u - \Phi(\zeta)) = 0$ 证明: $\Phi(\zeta)$ 满足 ODE: $\zeta\Phi'(\zeta) - \Phi(\zeta) = 0$. 因而导出 Poisson 核 (Bluman, Cole, 1974).

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}.$$

12. 考虑具有自变量 t 和 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的线性齐次 PDE 的边值问题

$$Lu = 0, \quad t > 0,\ x \in \Omega, \tag{4.277a}$$

且 $k-1$ 个线性齐次边值条件

$$L_\alpha u = 0, \quad \omega_\alpha(x) = 0, \quad \alpha = 1,2,\cdots,k-1 \tag{4.277b}$$

和线性非齐次初值条件

$$L_k u = h(x), \quad t = 0. \tag{4.277c}$$

如果辅助的齐次边值问题拥有 $X = \dfrac{\partial}{\partial t}$, 证明边值问题 (4.277a~c) 的解具有逆 Laplace 变换表示

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} F(x;s) \mathrm{e}^{st} \mathrm{d}s, \tag{4.278}$$

其中 $F(x;s)$ 可由将 (4.278) 代入边值问题 (4.277a~c) 确定. 当 (4.277a) 的右边是 $g(x)$ 且初值条件 (4.277c) 为齐次时, 情况如何?

4.5 讨 论

本章证明了:

(1) 求标量 PDE 或 PDEs 所拥有的点对称;

(2) 利用 PDEs 的所拥有的点对称, 构造相应的不变解 (也称相似解);

(3) 求并且利用 PDE 的边值问题所拥有的点对称, 将边值问题约化为包含更少自变量的问题.

标量 PDEs 的不变解是由 Lie(1881) 发现的. 标量 PDE 或 PDEs 组的解通过两种方式可由拥有的点对称来确定:

(1) 不变形式方法. 首先显式地求解源于不变曲面条件的特征方程, 结果获得所导致的不变解的不变形式. 然后不变解可由将不变形式代入给定的 PDEs 来确定.

(2) 直接代入法 (Bluman, Kumei, 1989b). 首先孤立一个特殊自变量且把它作为参数. 然后将不变曲面条件和必要的微分结果代入给定的 PDEs, 目的是估计关于该孤立自变量 (参量) 的所有导数.

通过求解约化的 PDEs (与给定的 PDEs 相比减少一个自变量), 然后将约化的 PDEs 的解代入不变曲面条件或给定的 PDEs, 可确定所导致的不变解. 最重要的, 不需要显式地求解对应于不变曲面条件的特征方程, 用直接代入法就可以构造不变解. 从所拥有的多参数点对称群 (参考 4.4.1 节), 可以推广这两种方法来获得不变解.

如果对称分别使得边界、边界条件和 PDEs 的边值问题保持不变, 则标量 PDE 或 PDEs 系统的边值问题拥有点对称. 如果边值问题具有好的类型, 则它的解是由所拥有的点对称导致的不变解. 如果边值问题拥有多参数 Lie 点变换群, 则边值问题解的构造可进一步简化.

当点对称作用下在线性边值问题中应用不变性时, 并不必保持边值问题的边界条件不变. 而且, 仅仅需要保持非齐次 PDE 的辅助齐次 PDE 不变, 因为齐次 PDE 总拥有因变量的一个统一的尺度变化. 这里源于辅助齐次边值问题的不变性的不变解或不变形式的叠加, 可以用于求解给定的边值问题.

与自变量和因变量比较, 当群并不拥有充分多的独立不变量时, Anderson (2000) 考虑了源于 PDEs 系统所拥有的多参数点对称群的不变解. 与单参数群作用下不变性的情况相比, 这要求更复杂的不变形式来求不变解 (参考 4.3.1 节). 特别地, 当依次求源于三维空间中 PDEs 系统的旋转群 SO(3) 作用下不变性的不变解时, 即流体流动的 Euler 方程, 其因变量包括它的自变量的向量函数.

通常, 非线性 PDE 的边值问题的渐近解或是源于尺度不变性的自相似型的不变解 (自相似或自模型解), 或是源于空间和时间平移作用下不变性的行波解. 关于自相似渐近的全面评论参看文献 (Newman, 1984; Galaktionov, Dorodnitsyn, Elenin, Kurdyumov, Samarskii, 1988). 对于自相似和行波渐近应用于物理问题, 文献 (Barenblatt, Zel'dovich, 1972; Barenblatt, 1979, 1987, 1996; Goldenfeld, 1992; Barenblatt, Zel'dovich, 1972; Barenblatt, 1979, 1987, 1996) 考虑了中间渐近例子, 这里在中间时间邻域中, 边值问题的解可用相似解来近似, 该解与给定的边值条件无关, 在这样的例子中, 相似解并不是平衡态. Kamin (1975) 粗略地证明了多孔渗水媒介方程的解发展成为相似解. 对于粗略地证明相似渐近的文章, 参看文献 (Atkinson, Peletier, 1974; Friedman, Kamin, 1980; Galaktionov, Samarskii, 1984; Kamin, 1975).

标量 PDE 或 PDEs 组的点对称描述了在解曲面上的几何运动. 正如 ODEs 情形, 那样的运动自然地刻画在辅助于 PDE 或 PDEs 组的 jet 空间上, 且坐标由自变量、因变量以及它们的直到有限阶的偏导数构成. 这里, 所拥有的点对称几何上代表向量场的积分曲线, 该向量场切于由给定的标量 PDEs 定义的曲面, 或同时切于由给定的 PDEs 组定语的曲面组, 并且在整个 jet 空间上的坐标中保持导数 (接触理想) 关系不变. 当考虑一阶和高阶对称时, 自然也存在这样的向量场. 特别地, 点对称对应于向量场, 通过将定义在自变量和因变量作为坐标上的单参数 Lie 变换群推广 (延拓) 到作用在 jet 空间中包含关于自变量的所有偏导数的坐标上的变换来确定 (参考 2.4 节). 一个标量 PDE 或 PDEs 组所拥有的所有点对称组成一个群, 其具有抽象连接 Lie 群的结构 (参考 2.8 节), 该 Lie 代数有 Lie 括号来刻画, 且同构于辅助于 PDE 或 PDEs 组的 jet 空间上的代表点对称的向量场的换位子.

在下一本书中, 我们将考虑其他有关 PDEs 的不变性问题, 包括:

(1) PDEs 的局部守恒律的算法计算, 类似于 ODEs 的首次积分 (参考 3.6 节, 3.7 节)(Olver, 1986; Anco, Bluman, 1997a, 2002a,b).

(2) PDEs 的高阶对称 (所谓的 Lie-Backlund 对称) 的计算和应用, 包括用于

线性化的递推算子 (Anderson, Kumei, Wulfman, 1972; Olver, 1977, 1986; Bluman, Kumei, 1980, 1989b; Mikhailov, Shabat, Sokolov, 1991; Krasil'shchik, Vinogradov, 1989);

(3) 利用点对称和接触对称研究 PDEs 的线性化, 以及发掘 PDEs 有关的映射 (Kumei, Bluman, 1982; Bluman, Kumei, 1989b, 1990a; Bluman, 1983b).

(4) 非局部对称的计算 (包括源于守恒律的势对称) 以及将它们应用于求不变解、线性化和守恒律 (Bluman, Kumei, 1987, 1988, 1989b, 1990b; Bluman, Kumei, Reid, 1988; Mikhailov, Shabat, Sokolov, 1991; Anco, Bluman, 1996, 1997b).

(5) 将源于点对称作用下不变性求不变解的方法推广到寻找 PDEs 解的非古典方法 (Bluman, Cole, 1969). 对于非线性 PDE, 非古典方法可以求一些解, 这些解并不是 PDE 的点对称所导致的不变解 (Levi, Winternitz, 1989; Nucci, Clarkson, 1992; Clarkson, Mansfield, 1994a,b).

参考文献

Abraham-Shrauner B, Leach P G L, Govinder K S, Ratcliff G. 1995. Hidden and ontact symmetries of ordinary differential equations. *J. Phys.,* **A28**: 6707–6716.

Abramowitz M and Stegun I A eds. 1970. *Handbook of Mathematical Functions.* New York: Dover.

Aguirre M and Krause J. 1985. Infinitesimal symmetry transformations, II. Some nedimensional nonlinear systems. *J. Math. Phys.,* **26**: 593–600.

Akhatov I S, Gazizov R K, Ibragimov N H. 1988. Bäcklund transformations and nonlocal symmetries. *Soviet Math. Dokl.,* **36**: 393–395. See also *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. I, 1994, Chap. 13, pp. 258–291 (N.H. Ibragimov, ed.). FL: RC Press. Boca Raton.

Aksenov A V. 1995. Symmetries of linear partial differential equations and fundamental solutions. *Dokl. Math.,* **51**: 329–331.

Ames W F, Lohner R J, Adams E. 1981. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$. *Internat. J. Nonlinear Mech.,* **16**: 439–447.

Anco S C and Bluman G W. 1996. Derivation of conservation laws from nonlocal symmetries of differential equations. *J. Math. Phys.,* **37**: 2361–2375.

Anco S C and Bluman G W. 1997a. Direct construction of conservation laws from field equations. *Phys. Rev. Lett.,* **78**: 2869–2873.

Anco S C and Bluman G W. 1997b. Nonlocal symmetries and nonlocal conservation laws of Maxwell's equations. *J. Math. Phys.,* **38**: 3508–3532.

Anco S C and Bluman G W. 1998. Integrating factors and first integrals for ordinary differential equations. *European J. Appl. Math.,* **9**: 245–259.

Anco S C and Bluman G W. 2002a. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part I: Examples of conservation law classifications. To appear in *European J. Appl. Math.*

Anco S C and Bluman G W. 2002b. Direct construction method for conservation laws of partial differential equations. Part II: General treatment. To appear in *European J. Appl. Math.*

Anderson I M, Fels M, Torre C G. 2000. Group invariant solutions without transversality. *Comm. Math. Phys.,* **212**: 653-686.

Anderson R L, Kumei S, Wulfman C E. 1972. Generalization of the concept of invariance of differential equations. *Phys. Rev. Lett.,* **28**: 988–991.

Atkinson F V and Peletier L A. 1974. Similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.,* **54**: 373–392.

Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H. 1990. Classification of multi-dimensional wave equations with respect to exact and approximate symmetries. *Preprint 51, Institute of Applied Mathematics.* USSR, Moscow: Academy of Sciences. See also *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. I, 1994, Chap. 12, pp. 222–224 (N.H. Ibragimov, ed.). FL: CRC Press. Boca Raton.

Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H. 1991. Approximate symmetries and conservation laws // *Number Theory, Algebra, Analysis and Their Applications.* Proc. Steklov Math. Inst., Academy of Sciences, USSR, Vol. 200, Nauka, Moscow. See also *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations,* Vol. I, 1994, Chap. 12, pp. 222–224 (N.H. Ibragimov, ed.). FL: CRC Press. Boca Raton.

Barenblatt G I. 1979. *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics.* New York: Consultants Bureau.

Barenblatt G I. 1987. *Dimensional Analysis.* New York: Gordon and Breach.

Barenblatt G I. 1996. *Scaling, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics.* Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Barenblatt G I and Zel'dovich Ya B. 1972. Self-similar solutions as intermediate asymptotics. *Ann. Rev. Fluid Mech.,* **4**: 285–312.

Baumann G and Nonnenmacher T F. 1987. Lie transformations, similarity reduction, and solutions for the nonlinear Madelung fluid equations with external potential. *J. Math. Phys.,* **28**: 1250–1260.

Becker H A. 1976. *Dimensionless Parameters: Theory and Method.* New York: Wiley.

Bianchi L. 1918. *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi Continui Finiti di Transformazioni.* Pisa. Italy: Enrico Spoerri.

Birkhoff G. 1950. *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude.* Princeton. NJ: Princeton University Press.

Bluman G W. 1967. Construction of Solutions to Partial Differential Equations by the Use of Transformation Groups. Ph.D. Thesis. California Institute of Technology.

Bluman G W. 1971. Similarity solutions of the one-dimensional Fokker–Planck equation. *Internat. J. Nonlinear Mech.,* **6**: 143–153.

Bluman G W. 1974. Applications of the general similarity solution of the heat equation to boundary value problems. *Quart. Appl. Math.,* **31**: 403–415.

Bluman G W. 1980. On the transformation of diffusion processes into the Wiener process. *SIAM J. Appl. Math.*, **39**: 238–247.

Bluman G W. 1983a. Dimensional analysis, modelling, and symmetry. *Internat. J Math Ed. Sci. Tech.*, **14**: 259–272.

Bluman G W. 1983b. On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations. *SIAM J. Appl. Math.*, **43**: 1259–1273.

Bluman G W. 1990a. Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **145**: 52–62.

Bluman G W. 1990b. A reduction algorithm for an ordinary differential equation admitting a solvable Lie group. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**: 1689–1705.

Bluman G W. 1990c. Invariant solutions for ordinary differential equations. *SIAM J Appl Math.*, **50**: 1706–1715.

Bluman G W and Cole J D. 1969. The general similarity solution of the heat equation. *J Math Mech*, **18**: 1025–1042.

Bluman G W and Cole J D. 1974. *Similarity Methods for Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, No. 13. New York: Springer-Verlag.

Bluman G W and Doran-Wu P. 1995. The use of factors to discover potential systems or linearizations. *Acta Appl. Math.*, **2**: 79–96.

Bluman G W and Gregory R D. 1985. On transformations of the biharmonic equation. *Mathematika*, **32**: 118–130.

Bluman G W and Kumei S. 1980. On the remarkable nonlinear diffusion equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

J. Math. Phys., **21**: 1019–1023.

Bluman G W and Kumei S. 1987. On invariance properties of the wave equation. *J. Math. Phys.*, **28**: 307–318.

Bluman G W and Kumei S. 1988. Exact solutions for wave equations of two-layered media with smooth transition. *J. Math. Phys.*, **29**: 86–96.

Bluman G W and Kumei S. 1989a. Use of group analysis in solving overdetermined systems of ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **138**: 95–105.

Bluman G W and Kumei S. 1989b. *Symmetries and Differential Equations.* Applied Mathematical Sciences, No. 81. New York: Springer-Verlag.

Bluman G W and Kumei S. 1990a. Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations, I. Local symmetries. *European J. Appl. Math.*, **1**: 189–216.

Bluman G W and Kumei S. 1990b. Symmetry-based algorithms to relate partial differential equations, II. Linearization by nonlocal symmetries. *European J. Appl. Math.*, **1**: 217–223.

Bluman G W, Kumei S, Reid G J. 1988. New classes of symmetries for partial differential equations. *J. Math. Phys.*, **29**: 806–811; Erratum, *J. Math. Phys.*, **29**: 2320.

Bluman G W and Shtelen V M. 1998. Preprint. Nonlocal transformations of diffusion processes to Wiener processes. Department of Mathematics, University of British Columbia, BC.

Boisvert R E, Ames W F, Srivastava U N. 1983. Group properties and new solutions of Navier-Stokes equations. *J. Engrg. Math.*, **17**: 203–221.

Boyer T H. 1967. Continuous symmetries and conserved currents. *Ann. Physics*, **42**: 445–466.

Bridgman P W. 1931. *Dimensional Analysis.* 2nd ed. New Haven. CT: Yale University Press.

Buckingham E. 1914. On physically similar systems; illustrations of the use of dimension equations. *Phys. Rev.*, **4**: 345–376.

Buckingham E. 1915a. The principle of similitude. *Nature*, **96**: 396–397.

Buckingham E. 1915b. Model experiments and the forms of empirical equations. *Trans. ASME*, **37**: 263–296.

Cantwell B J. 1978. Similarity transformations for the two-dimensional, unsteady, stream-function equation. *J. Fluid Mech.*, **85**: 257–271.

Champagne B, Hereman W, Winternitz P. 1991. The computer calculation of Lie point symmetries of large systems of differential equations. *Comput. Phys. Comm.*, **66**: 319–340.

Cheb-Terrab E S and Roche A D. 1999. Integrating factors for second-order ODEs. *J. Symbolic Comput.*, **27**: 501–519.

Cicogna G and Vitali D. 1990. Classification of the extended symmetries of Fokker–Planck equations. *J. Phys.*, **A23**: L85–L88.

Clarkson P A and Mansfield E L. 1994a. Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear equations. *Physica*, **D70**: 250–288.

Clarkson P A and Mansfield E L. 1994b. Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions. *SIAM J. Appl. Math.*, **54**: 1693–1719.

Coddington E A. 1961. *An Introduction to Ordinary Differential Equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. Reprinted. 1989. New York: Dover.

Cohen A. 1911. *An Introduction to the Lie Theory of One-Parameter Groups, with Applications to the Solution of Differential Equations.* New York: D.C. Heath.

Cohn P M. 1965. *Lie Groups.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 46. Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Cole J D and Wagner B. 1996. On self-similar solutions of Barenblatt's nonlinear filtration equation. *European J. Appl. Math.,* **7**: 151–167.

Curtis W D, Logan J D, Parker W A. 1982. Dimensional analysis and the pi theorem. *Linear Algebra Appl.,* **47**: 117–126.

de Jong F J. 1967. *Dimensional Analysis for Economists.* Amsterdam: North-Holland.

Dickson L E. 1924. Differential equations from the group standpoint. *Ann. of Math.,* **25**: 287–378.

Dresner L. 1983. *Similarity Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations.* Research Notes in Mathematics, No. 88. Boston. MA: Pitman.

Dresner L. 1999. *Applications of Lie's Theory of Ordinary and Partial Differential Equations.* Bristol. UK: Institute of Physics.

Drew M S, Kloster S C, Gegenberg J D. 1989. Lie group analysis and similarity solutions for the equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (e^u)}{\partial z^2} = 0.$$

Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., **13**: 489–505.

Edwards M P and Broadbridge P. 1995. Exceptional symmetry reductions of Burgers' equation in two and three spatial dimensions. *Z. Angew. Math. Phys.,* **46**: 595–622.

Eisenhart L P. 1933. *Continuous Groups of Transformations.* Princeton. NJ: Princeton University Press.

Friedman A and Kamin S. 1980. The asymptotic behavior of gas in an n-dimensional porous medium. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **262**: 551–563.

Galaktianov V A, Dorodnitsyn VA, Elenin G G, Kurdyumov S P, Samarskii A A. 1988. A quasilinear heat equation with a source: Peaking, localization, symmetry, exact solutions, asymptotics, structures. *J. Soviet Math.,* **41**: 1222–1292.

Galaktionov V A and Samarskii A A. 1984. Methods of constructing approximate self-similar solutions of nonlinear heat equations, IV. *Math. USSR-Sb.,* **49**: 125–150.

Gandarias M L. 1996. Classical point symmetries of a porous medium equation. *J. Phys.,* **A29**: 607–633.

Gilmore R. 1974. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications.* New York: Wiley.

Goldenfeld, N. 1992. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*. Reading. MA: Addison-Wesley.

Gonzalez-Gascon F and Gonzalez-Lopez A. 1983. Symmetries of differential equations, IV. *J. Math. Phys.*, **24**: 2006–2021.

Gordon T J. 1986. On the symmetries and invariants of the harmonic oscillator. *J. Phys.*, **A19**: 183–189.

Görtler H. 1975. Zur Geschichte des π-Theorems. *Z. Angew. Math. Mech.*, **55**: 3–8.

Greub W H. 1967. *Multilinear Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Hansen A G. 1964. *Similarity Analyses of Boundary Value Problems in Engineering*. Englewood. Cliffs. NJ: Prentice-Hall.

Haynes R. 1982. *An Introduction to Dimensional Analysis for Geographers*. London. UK: Institute of British Geographers.

Head A K. 1992. LIE: A muMATH Program for the Calculation of the LIE Algebra of Differential Equations. Clayton. Australia: CSIRO Division of Material Sciences.

Heredero R H and Olver P J. 1996. Classification of invariant wave equations. *J. Math. Phys.*, **37**: 6414–6438.

Hereman W. 1996. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 3: *New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, Chap. 13, pp. 367–413. (N.H. Ibragimov, ed.). Boca Raton. FL: CRC Press.

Holmes M H. 1984. Comparison theorems and similarity solution approximations for a nonlinear diffusion equation arising in the study of soft tissue. *SIAM J. Appl. Math.*, **44**: 545–556.

Hydon P E. 2000. *Symmetry Methods for Differential Equations. A Beginner's Guide*. Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Ibragimov N H. 1985. *Transformation Groups Applied to Mathematical Physics*. Reidel, Boston, MA. See also *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 2, Chap. 11, pp. 272–273 (Ibragimov N H, ed.). Boca Raton. FL: CRC Press.

Ibragimov N H. 1995. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 2, Chap. 11, pp. 269–293 (Ibragimov N H, ed.). Boca Raton. FL: CRC Press.

Kamin S. 1975. Similarity solutions and the asymptotics of infiltration eqautions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **60**: 171–183.

Kamke E. 1943. *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Vol. 1, Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft.

Kaplan, W. 1958. *Ordinary Differential Equations*. Reading. MA: Addison-Wesley.

Kersten P H M. 1987. *Infinitesimal Symmetries: a Computational Approach.* CWI Tract No. 34. Amsterdam: Centrum voor Wiskunde en Informatica.

King J R. 1989. Exact solutions to some nonlinear diffusion equations. *Quart. J. Mech. Appl Math,* **42**: 537–552.

King J R. 1991. Exact results for the nonlinear diffusion equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \text{ and } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{-2/3}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

J. Phys., **A24**: 5721–5745.

Klamkin M S. 1962. On the transformation of a class of boundary value problems into initial value problems for ordinary differential equations. *SIAM Rev.,* **4**: 43–47.

Krasil'shchik I S and Vinogradov A M. 1989. Nonlocal trends in the geometry of differential equations: Symmetries, conservation laws, and Bäcklund transformations. *Acta Appl. Math.,* **15**: 161–209.

Kumei S and Bluman G W. 1982. When nonlinear differential equations are equivalent to linear differential equations. *SIAM J. Appl. Math.,* **42**: 1157–1173.

Kurth K. 1972. *Dimensional Analysis and Group Theory in Astrophysics.* Oxford. UK: Pergamon Press.

Lefschetz S. 1963. *Differential Equations: Geometric Theory.* 2nd ed. New York: Interscience.

Levi D and Winternitz P. 1989. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation. *J. Phys.,* **A22**: 2915–2924.

Lie S. 1881. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen. *Arch. Math.,* **6**: 328–368; also *Gesammelte Abhandlungen,* Vol. III, pp. 492–523. Leipzig: B.G. Teubner. 1922.

Lie S. 1893. *Theorie der Transformationsgruppen,* Vol. III. B.G. Teubner, Leipzig.

Lighthill M J. 1958. *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions.* Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Lisle I. 1992. Equivalence Transformations for Classes of Differential Equations. Ph.D. Thesis, University of British Columbia, BC.

Liu Q and Fang F. 1986. Symmetry and invariant solution of the Schlögl model. *Physica,* **139A**: 543–552.

Mandelbrot B B. 1977. *Fractals: Form, Chance and Dimension.* San Francisco. CA: W.H. Freeman.

Mandelbrot B B. 1982. *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W.H. Freeman.

Mansfield E L. 1996. The differential algebra package diffgrob2. *Maple Tech.*, **3**: 33–37.

Mansfield E L and Clarkson P A. 1997. Applications of the differential algebra package diffgrob2 to classical symmetries of differential equations. *J. Symbolic Comput.*, **23**: 517–533.

Marsden J E and Ratiu T S. 1999. *Introduction to Mechanics and Symmetry.* Texts in Applied Mathematics, No. 17. New York: Springer.

Mikhailov A V, Shabat A B, Sokolov V V. 1991. The symmetry approach to classification of integrable equations. In *What Is Integrability*? (V.E. Zakharov, ed.). Berlin: Springer-Verlag, pp. 115–184.

Milinazzo F. 1974. Numerical Algorithms for the Solution of a Single Phase One-Dimensional Stefan Problem. Ph.D. Thesis, University of British Columbia, BC.

Milinazzo F and Bluman G W. 1975. Numerical similarity solutions to Stefan problems. *Z. Angew. Math. Mech.*, **55**: 423–429.

Miller W Jr. 1977. *Symmetry and Separation of Variables.* Reading. MA: Addison-Wesley.

Mimura F and Nôno T. 1994. A new conservation law for a system of second-order differential equations. *Bull. Kyushu Inst. Tech.*, **41**: 1–10.

Murota K. 1985. Use of the concept of physical dimensions in the structural approach to systems analysis. *Japan. J. Appl. Math.*, **2**: 471–494.

Na T Y. 1967. Transforming boundary conditions to initial conditions for ordinary differential equations. *SIAM Rev.*, **9**: 204–210.

Na T Y. 1979. *Computational Methods in Engineering Boundary Value Problems.* New York: Academic Press.

Neuringer J L. 1968. Green's function for an instantaneous line particle source diffusing in a gravitational field and under the influence of a linear shear wind. *SIAM J. Appl. Math.*, **16**: 834–842.

Newman W I. 1984. A Lyapunov functional for the evolution of solutions to the porous medium equation to self-similarity, I. *J. Math. Phys.*, **25**: 3120–3123.

Noether E. 1918. Invariante Variationsprobleme. *Nachr. König. Gesell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, pp. 235–257.

Nucci M C and Clarkson P A. 1992. The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reductions. An example of the Fitzhugh–Nagumo equation. *Phys. Lett.*, **A164**: 49–56.

Olver P J. 1977. Evolution equations possessing infinitely many symmetries. *J. Math. Phys.*, **18**: 1212–1215.

Olver P J. 1986. *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Graduate Texts in Mathematics, No. 107. New York: Springer-Verlag.

Ovsiannikov L V. 1959. Group properties of the nonlinear heat conduction equation. *Dokl. Akad. Nauk. USSR,* **125**: 492–495 (in Russian).

Ovsiannikov L V. 1962. *Group Properties of Differential Equations.* Nauka, Novosibirsk (in Russian).

Ovsiannikov L V. 1982. *Group Analysis of Differential Equations.* New York: Academic Press.

Page J M. 1896. Note on singular solutions. *Amer. J. Math.,* **XVIII**: 95–97.

Page J M. 1897. *Ordinary Differential Equations with an Introduction to Lie's Theory of the Group of One Parameter.* London. UK: Macmillan.

Reid G J. 1990. A triangularization algorithm which determines the Lie symmetry algebra of any system of PDEs. *J. Phys.,* **A23**: L853–L859.

Reid G J. 1991. Algorithms for reducing a system of PDEs to standard form, determining the dimension of its solution space and calculating its Taylor series solution. *European J. Appl. Math.,* **2**: 293–318.

Rosinger E E and Walus Y E. 1994. Group invariance of generalized solutions obtained through the algebraic method. *Nonlinearity,* **7**: 837–859.

Rudra P. 1990. Symmetry classes of Fokker–Planck-type equations. *J. Phys.,* **A23**: 1663–1670.

Sarlet W, Cantrijn F, Crampin M. 1987. Pseudo-symmetries, Noether's theorem and the adjoint equations. *J. Phys.,* **A20**: 1365–1376.

Sarlet W, Prince G E, Crampin M. 1990. Adjoint symmetries for time-independent second-order equations. *J. Phys.,* **A23**: 1335–1347.

Schepartz B. 1980. *Dimensional Analysis in the Biomedical Sciences.* Springfield. IL: C.C. Thomas.

Schlichting H. 1955. *Boundary Layer Theory.* New York: McGraw-Hill.

Schwarz F. 1985. Automatically determining symmetries of partial differential equations. *Computing,* **34**: 91–106.

Schwarz F. 1988. Symmetries of differential equations: From Sophus Lie to computer algebra. *SIAM Rev.,* **30**: 450–481.

Sedov L I. 1982. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics.* 9th ed. Moscow: Mir.

Senthilvelan M and Lakshmanan M. 1995. Lie symmetries and infinite-dimensional Lie algebras of certain nonlinear dissipative systems. *J. Phys.,* **A28**: 1929–1942. .

Seshadri R and Na T Y. 1985. *Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems.* New York: Springer-Verlag.

Sheftel M B. 1997. *A Course on Group Analysis of Differential Equations.* Part II. *Ordinary Differential Equations.* Nauka, St. Petersburg (in Russian).

Sophocleous C. 1992. On symmetries of radially symmetric nonlinear diffusion equations. *J. Math. Phys.,* **33**: 3687–3693.

Stephani H. 1989. *Differential Equations: Their Solution Using Symmetries.* Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Stognii V I and Shtelen V M. 1991. Symmetries and particular solutions of some Fokker–Planck equations. *Ukrainian Math. J.,* **43**: 456–460 (in Russian).

Tajiri M. 1983. Similarity reductions of the one- and two-dimensional nonlinear Schrödinger equations. *J. Phys. Soc. Japan,* **52**: 1908–1917.

Tajiri M and Hagiwara M. 1983. Similarity solutions for the two-dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation. *J. Phys. Soc. Japan,* **52**: 3727–3734.

Taylor E S. 1974. *Dimensional Analysis for Engineers.* Oxford, UK: Clarendon Press.

Taylor Sir G I. 1950. The formation of a blast wave by a very intense explosion, II. The atomic explosion of 1945. *Proc. Roy. Soc.,* **A201**: 175–186.

Torrisi M and Valenti A. 1985. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation. *Internat. J. Nonlinear Mech.,* **20**: 135–144.

Venikov V A. 1969. *Theory of Similarity and Simulation.* London. UK: MacDonald Technical and Scientific.

Warner F J. 1983. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Graduate Texts in Mathematics, No. 94. New York: Springer-Verlag.

Watson G N. 1922. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge. UK: Cambridge University Press.

Wolf T. 2002a. Investigating differential equations with CRACK, LiePDE, Applysymm and ConLaw. To appear in *Handbook of Computer Algebra, Foundations, Applications, Systems* (Grabmeier J, E. Kaltofen, and V. Weispfenning, eds.). New York: Springer.

Wolf T. 2002b. A comparison of four approaches to the calculation of conservation laws. To appear in *European J. Appl. Math.*

Wolf T and Brand A. 1992. The computer algebra package CRACK for investigating PDEs. // *Proceedings of ERCIM Advanced Course on Partial Differential Equations and Group Theory.* Bonn.

Wulfman C E. 1979. Limit cycles as invariant functions of Lie groups. *J. Phys.*, **A12**: L73–L75.

Zel'dovich Ya B. 1956. The motion of a gas under the action of a short term pressure (shock). *Akust. Zh.*, **2**: 28–38 (in Russian).

Zierep J. 1971. *Similarity Laws and Modeling.* New York: Marcel Dekker.

译 后 记

本书详细阐述了 Lie 点变换群及其在微分方程中的应用, 内容由浅入深, 并且列举了大量的例子来进一步诠释 Lie 点变换群的精髓, 只需要具备大学微积分、高等代数、常微分方程和偏微分方程的初步知识, 就可以理解和掌握本书. 这是一本难得的好书.

感谢 Bluman 教授对我翻译工作的大力支持, 他将本书的英文原稿发给我, 保证了数学公式与原版的一致性, 使得翻译错误降低到最小. 感谢他在百忙之中为中文版作序.

感谢北京邮电大学吕卓生副教授和羊正正硕士翻译了部分小节, 并且帮助整理和校对了初稿.

感谢我的家人对我翻译工作的大力支持.

闫振亚

2008 年 6 月 8 日

《现代数学译丛》已出版书目

(按出版时间排序)

1 椭圆曲线及其在密码学中的应用——导引 2007. 12 〔德〕Andreas Enge 著 吴 铤 董军武 王明强 译

2 金融数学引论——从风险管理到期权定价 2008. 1 〔美〕Steven Roman 著 邓欣雨 译

3 现代非参数统计 2008. 5 〔美〕Larry Wasserman 著 吴喜之 译

4 最优化问题的扰动分析 2008. 3 〔法〕 J. Frédéric Bonnans 〔美〕Alexander Shapiro 著 张立卫 译

5 统计学完全教程 2008. 6 〔美〕Larry Wasserman 著 张 波 等译

6 应用偏微分方程 2008. 7 〔英〕John Ockendon Sam Howison Andrew Lacey Alexander Movchan 著 谭永基 程 晋 蔡志杰 译

7 有向图的理论、算法及其应用 2009. 1 〔丹〕J.邦詹森 〔英〕G .古廷 著 姚兵 张忠辅 译

8 微分方程的对称与积分方法 2009.1 〔加〕G.W.布卢曼 S.C.安科 著 闫振亚 译